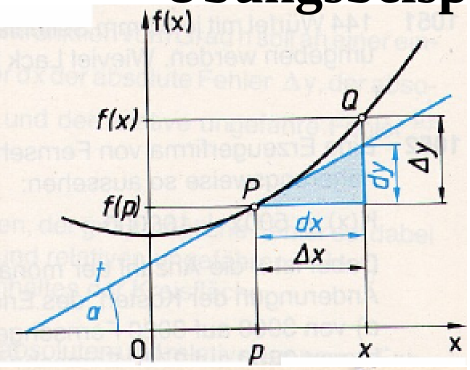
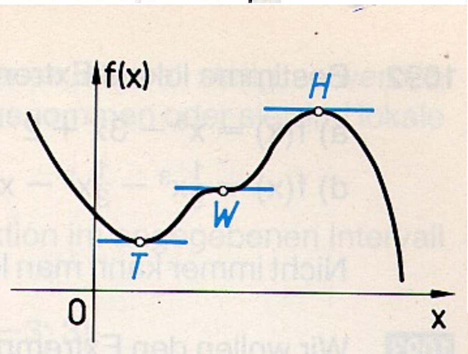
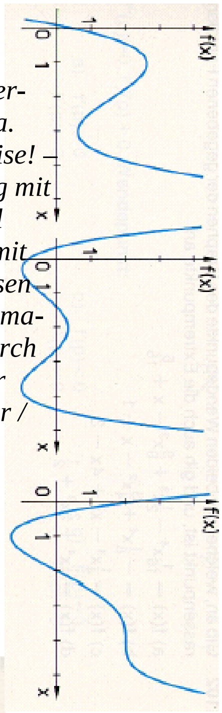
Übungsbeispiele für die 2. Schularbeit (zweistündig)

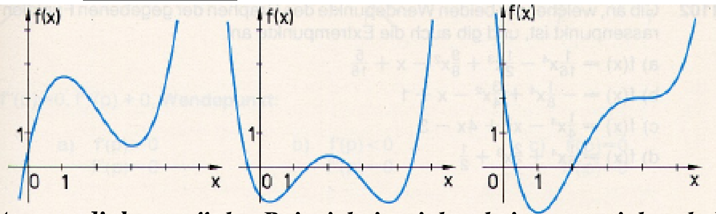




(7D, Realgymnasium, PM3, SS 2009)

Diese Beispiele sollen durch jene für den zweiten Teil des Kapitels "Differentialrechnung" relevanten Grundaufgaben {Untersuchen diverser Eigenschaften einfacher kubischer Kurven (u.a. NEILsche Kurve und NEWTONscher Knoten) und – ausblicksweise! – quartischer Kurven mittels Differentialrechnung in Verbindung mit dem Lösen von algebraischen Gleichungen, Bearbeiten sowohl inner- als auch außermathematischer Optimierungsprobleme mit besonderem Augenmerk auf die wesentlichen Schritte beim Lösen einer Optimierungsaufgabe [Aufstellen eines adäquaten mathematischen Modells, Beschreibung der zu optimierenden Größe durch eine Funktion ("Zielfunktion" oder "Hauptbedingung") in einer oder mehreren Variable(n), im letzteren Fall Formulieren einer / oder mehrerer entsprechenden/r Nebenbedingung/en zwecks Rückführung auf eine Zielfunktion in einer Variable, weitestgehende Vereinfachung der Zielfunktion vor Anwendung des analytischen Apparats (Extremwerttest aus der Kurvendiskussion) samt Begründungen für sich daraus ergebende Konsequenzen]} führen, die du bei der zweiten Schularbeit ***in jedem Fall*** *unter Beweis stellen wirst müssen.*





ACHTUNG! Ein bloßes "Auswendiglernen" der Beispiele ist sicher keine ausreichende Vorbereitung, da du deine erworbenen Kenntnisse bei der Schularbeit auf Problemstellungen anzuwenden hast, die zwar nicht gänzlich neuartig, aber zum Teil in der Form wie bei der Schularbeit gestellt in dieser Aufgabensammlung nicht enthalten sind! Ein eigenständiges Lösen dieser Aufgaben (bis auf jene, die wir in diversen Schulübungen gemeinsam bearbeiten werden) ist eine absolute Notwendigkeit für ein angemessenes Übungsprogramm!

1) a) Stelle im Punkt $T(2|y_T)$ der Kurve ν mit der Gleichung $\boxed{\nu: y = \frac{\sqrt{2}}{x^2}}$ eine Gleichung der Tangente t_T auf.

   b) Begründe, warum ν und t_T noch genau einen weiteren gemeinsamen Punkt S gemeinsam haben müssen und berechne ebenda das Maß eines Schnittwinkels zwischen ν und t_T!

2) Durch den Punkt $P(a|¼\cdot a)$ verläuft genau eine NEILsche Kurve ν mit der Gleichung $\boxed{\nu: y^2 = bx^3}$.

   a) Berechne b (in Abhängigkeit von a), stelle in P eine Gleichung der Tangente t_P an ν auf und ermittle die Lage des zweiten gemeinsamen Punkts $Q(x_Q|y_Q)$ von ν und t_P.

   b) Kontrolliere, dass $\boxed{x_Q = y_P}$ gilt!

   c) Für welchen Wert von a wird ν in Q von t_P rechtwinklig geschnitten?

3) Zeige, dass die NEILsche Kurve ν [ν: $3t^2y^2=2x^3$] und die Hyperbel hyp [hyp: $3xy = t^4\cdot\sqrt{6}$] einander für jeden Wert des Parameters t unter rechtem Winkel schneiden.

4) Beweise: Die Gerade g [g: $y = kx + d$] ist genau dann Tangente an die NEILsche Kurve ν [ν: $y^2 = a^2x^3$], wenn die *Berührungsbedingung* $\boxed{729a^4d^2 = 16k^6}$ erfüllt ist.

5) Durch den Punkt P(3|27) verläuft genau eine NEILsche Kurve ν [ν: $y^2 = (x+a)^3$] sowie eine Parabel par in erster Hauptlage. Zeige, dass ν und par einander ebenda berühren!

6) Beweise:

a) Die NEILsche Kurve ν [ν: $27h^3y^2 = r^2(x+2h)^3$] geht durch den Punkt P(h|r).

b) Durch P verläuft genau eine Parabel par in erster Hauptlage, welche ν ebenda berührt.

7) Zeige, dass die NEILsche Kurve ν [ν: $27y^2 = (x+20)^3$] von der Gerade g [g: $x - y + 16 = 0$] im gleichen Punkt berührt wird wie der entsprechende Ursprungskreis und berechne ferner die Koordinaten des zweiten gemeinsamen Punkts von g und ν.

8) Stelle eine Gleichung jener NEILschen Kurve ν [ν: $ay^2=(x+b)^3$] auf, welche von der Gerade g [g: $x-2y+8=0$] im gleichen Punkt berührt wird wie die entsprechende Ellipse in Hauptlage.

9) Lege in den Schnittpunkten der NEILschen Kurve ν [ν: $27y^2 = 4(x+3)^3$] mit der y-Achse die Tangenten an ν und zeige, dass diese aufeinander normal stehen!

10) a) Lege im Schnittpunkt P der NEILschen Kurve ν [ν: $27y^2 = 2(x+12)^3$] mit der positiven y-Achse die Tangente t_P an ν und berechne die Koordinaten des zweiten gemeinsamen Punkts Q von t_P und ν.

b) Zeige, dass t_Q auf t_P normal steht!

11) An die NEILsche Kurve ν [ν: $9ay^2 = t(x+a)^3$, $a>0$, $t>0$] wird im Punkt $P(0|y_P>0)$ die Tangente t_P gelegt, mit Q sei der zweite Schnittpunkt von t_P mit ν bezeichnet. Ermittle jenen Wert des Parameters a, für welchen t_P und t_Q aufeinander normal stehen.

12) An die NEILsche Kurve ν [ν: $9ay^2 = t(x+a)^3$, $a>0$, $t>0$] werden in den Punkten $R(0|y_R>0)$ und $S(0|y_S<0)$ die Tangenten t_R und t_S gelegt. Ermittle jenen Wert des Parameters a, für welchen t_R und t_S aufeinander normal stehen.

13) Bezüglich des NEWTONschen Knotens ν mit der Gleichung $\boxed{\mathbf{\nu: 9y^2=2x^2(27-x)}}$ ist gefragt bzw. zu zeigen:

a) Koordinaten der wichtigsten Punkte des schleifenförmigen Teils von ν

b) Koordinaten *jener Kurvenpunkte*, in denen die Tangenten zu den Doppelpunkttangenten parallel sind

c) Die durch *diese Kurvenpunkte* verlaufende Parabel in erster Hauptlage schneidet ν ebenda orthogonal.

14) Verallgemeinerung von Aufgabe 13) für $\boxed{\mathbf{\nu: 3ty^2=2x^2(9t-x), t>0}}$!

15) Auf der kubischen Kurve ν mit der Gleichung $\boxed{\nu: y^2 = x^3}$ ("NEILsche Kurve") liegen die Punkte $P(16|y_P<0)$ und $Q(36|y_Q>0)$.

a) Berechne die Koordinaten des dritten gemeinsamen Punkts R von g_{PQ} und ν.

b) Stelle in den Punkten P, Q und R Gleichungen der Tangenten t_P, t_Q und t_R an ν auf!

c) Verifiziere am konkreten Beispiel der Kurve ν den für alle kubischen Kurven gültigen

SATZ. Sind P, Q und R Punkte einer kubischen Kurve ν in kollinearer Lage mit den entsprechenden Tangenten t_P, t_Q und t_R und gilt ferner $t_P \cap \nu = \{P, P'\}$ $t_Q \cap \nu = \{Q, Q'\}$ sowie $t_R \cap \nu = \{R, R'\}$, dann liegen auch P´, Q´ und R´ kollinear.

16) Die Schargleichung $\boxed{16h^3y^2 = 27d^2x^2(x+h)}$ beschreibt NEWTONsche Knoten, welche allesamt einen schleifenförmigen Teil aufweisen. Beweise, dass der maximale Querschnittsdurchmesser bzw. die Höhe des durch Rotation solch einer Schleife um ihre Symmetrieachse entstehenden tropfenförmigen Drehkörpers gerade durch die Parameter d und h gegeben ist.

17) Gegeben ist die Kurve ν mit der Kurvengleichung $\boxed{\nu: y = \frac{1}{10a} \cdot \left(\frac{10a^2}{x^4} - \frac{10ab}{x^3} + \frac{3b^2}{x^2}\right)}$ (worin a und b reelle Parameter sind).

a) Zeige, dass ν einen Flachpunkt F besitzt und stelle eine Gleichung der Flachpunkttangente t_F auf!

b) Berechne die Koordinaten des zweiten gemeinsamen Punkts S von ν und t_F und weise die Gültigkeit der Proportionen $\boxed{x_S : x_F = (-3) : 2}$ sowie $\boxed{y_S : y_F = 8 : 3}$ nach!

c) Beweise, dass ν in S von t_F genau dann rechtwinklig geschnitten wird, wenn $\boxed{1377b^{10} = 78125000a^8}$ gilt.

18) Gegeben ist der NEWTONsche Knoten ν mit der Gleichung ν: $900y^2 = x^2(13x+10800)$.

a) Stelle in $P(-600|y_P)$ sowohl eine Gleichung der Tangente t_P als auch der Kurvennormale n_P auf!

b) Zeige, dass n_P durch den Doppelpunkt von ν verläuft und berechne ferner die Koordinaten weiterer gemeinsamer Punkte von ν und t_P bzw. von ν und n_P! Was fällt dir in beiden Fällen auf und in welchem der beiden Fälle ist dies nicht überraschend? Erkläre anhand des eher überraschenden Falls, warum dies nicht anders sein kann!

19) Stelle eine Gleichung jener Ellipse ell in Hauptlage auf, welche den NEWTONsche Knoten ν mit der Gleichung ν: $y^2 = x^2(x+3)$ im Punkt $P(6|y_P)$ rechtwinklig schneidet und gib den Typ der Hauptlage an!

20) a) Skizziere die Kurven ν und ϑ mit den Gleichungen $\nu: y^2 = x^2\left(x+\frac{8}{3}\right)$ und $\vartheta: y^2 = \left(x+\frac{8}{3}\right)^3$ (informative Beschriftung!). Welche Kurve liegt jeweils vor?

b) Zeige, dass ν und ϑ einander rechtwinklig schneiden (in wie vielen Punkten?)!

21) Beweise: Die Tangente t_H an die Kurve ν $\left[\nu: 81ay^2 = 16 \cdot \tan^2\alpha \cdot x^2 \cdot (x+3a)\right]$ schneidet ν im zweiten gemeinsamen Punkt unter dem Winkel α.

Beachte ggf. den psychologischen Hinweis zu Beispiel 87 der Übungsaufgaben für die 1. Schularbeit (und wähle daher z. B. zunächst α=45° und a=16)!

22) **Eine (von vier) Aufgabe(n) einer zweistündigen Schularbeit:**

1. Gegeben ist die Kurve k mit der Gleichung $\boxed{k: y^2 = x^2(x+48)}$.

   (a) Skizziere die Kurve, berechne die Koordinaten ihres Hochpunktes sowie die Koordinaten des zweiten gemeinsamen Punktes P der Hochpunkttangente mit k inkl. einer Gleichung der Tangente t_P an k in P.

   (b) Berechne ferner die Koordinaten jenes Punktes $Q \in k$, in dem die Tangente an k parallel zu t_P verläuft.

   (c) Bestimme außerdem die Koordinaten des zweiten gemeinsamen Punktes R von t_P und k.

   (d) Analog zu (c) mit t_Q.

23) H bzw. D bezeichnet den Hochpunkt bzw. den Doppelpunkt der Kurve ν mit der Gleichung $\boxed{\nu: \sqrt{3} \cdot a \cdot y^2 = x^2 \cdot (x+3a)}$. Beweise, dass die Gerade g_{DH} eine der beiden Doppelpunkttangenten von ν rechtwinklig schneidet.

Beachte ggf. den psychologischen Hinweis zu Beispiel 87 der Übungsaufgaben für die 1. Schularbeit (und wähle daher z. B. zunächst a=1)!