96) Der Graph einer Polynomfunktion fünften Grades f besitzt im Ursprung einen Flachpunkt mit horizontaler Flachpunkttangente und verläuft ferner durch die Punkte $P(-1|-3)$ und $Q(1|-2)$.

a) Ermittle die Funktionsgleichung von f und prognostiziere inkl. jeweiliger Begründung vor der eher quantitativ orientierten Aufgabenstellung in b) jeweils die Anzahl zu erwartender (weiterer) Null-, Extrem- und Wendestellen!

b) Diskutiere f und skizziere Γ_f (ordentliche Beschriftung der Skizze inkl. aller differentialgeometrisch wichtigen Punkte!).

c) Zeige, dass die Gerade g durch den Wendepunkt und die rechtsseitige Nullstelle von Γ_f mit Γ_f zwei Gebiete begrenzt und berechne die Koordinaten des dritten gemeinsamen Punktes S von Γ_f und g!

d) Karim (8D, 2009/10) and one of his women (8A, 2009/10) – vgl. Hintergrund! – are working on the given analysis exercise for their final exam in mathematics and get the measures of the regions in c) by applying the *integral-calculus*, which leads them to the areas 972 (left region) und $\frac{356}{3}$ (right region). *Could* that be true? Account your answers each!

97) a) Berechne das Produkt $(x+t)(x^2-8tx+12t^2)$! (… wenngleich dies wohlbemerkt eine Aufgabe ist, wie ihr sie eigentlich am "geistigen Speiseplan" hattet, als ihr noch jünger wart, wie z. B. "unser Peter", "Klein Cha(br)os", "ORF" und T. $. in den Abbildungen aus ihrer ersten Mathematikstunde bei Prof. R. im Herbst 2004 – wie ihr euch ja vielleicht noch erinnert könnt, wenn ihr euer Gedächtnis ein wenig bemüht … ☺)

a) Bearbeite nun wiederum unter Beachtung der psychologischen Anleitung von Aufgabe 87) die folgenden Aufgabenstellungen [wobei für (3) Aufgabenteil (a) – AHA! – zu verwenden ist]: Gegeben ist die Polynomfunktion f mit der Funktionsgleichung $\boxed{y = f(x) = x^5 - 10tx^4 + 25t^2x^3}$, worin t einen reellen Parameter bezeichnet [abermals: Hinweis Aufgabe 87)!!].

(1) Ermittle die Nullstellen von f! Was läßt sich daraus bereits über die Anzahl von Extrem- und Wendestellen aussagen?

(2) Ermittle die Extremstellen von f und zeige, dass das arithmetische Mittel der positiven Wendestellen (welche nicht vollständig zu berechnen sind!) von f exakt die positive Extremstelle von f liefert.

(3) Lege durch die linke(este) Nullstelle und den Hochpunkt von Γ_f eine Gerade g und untersuche [unter Verwendung von a)!] die Lagebeziehung zwischen g und Γ_f (quantitative Resultate in Form von Koordinaten aller vorhandenen Schnittpunkten!). Wie viele Gebiete begrenzt g somit mit Γ_f und wie groß ist jener Winkel φ, den g mit der Tangente an Γ_f im mittleren Schnittpunkt von g mit Γ_f einschließt, wenn $\boxed{t = 0{,}45}$ gilt?

98) Für die Funktion f mit der Funktionsgleichung $\boxed{y = f(x) = x^5 - 30t^2x^3}$ sind [unter eventueller Berücksichtigung der psychologischen Bemerkung bei Aufgabe 87)!] folgende Punkte zu bearbeiten:

a) Führe eine vollständige Kurvendiskussion durch und fertige eine informativ beschriftete Skizze von Γ_f an!

b) Weise in einem Wendepunkt W mit schräg verlaufender Wendetangente t_W die Oskulation von t_W mit Γ_f nach. Wie viele weitere gemeinsame Punkte könnten t_W und Γ_f prinzipiell noch haben und welcher Fall liegt tatsächlich vor (zwei Antworten, zwei Begründungen!)?

99) Für die Funktion f mit der Funktionsgleichung $\boxed{y = f(x) = 3x^5 - 6250t^2x^3 + 459375t^4x}$ ist [unter eventueller Berücksichtigung der psychologischen Bemerkung bei Aufgabe 87!)] eine vollständige Kurvendiskussion durch, wobei neben der offensichtlichen Nullstelle x=0 von den verbleibenden Nullstellen nur die betragsgrößeren unter ihnen auf eine Dezimalstelle genau angegeben werden sollen.

100) **<u>Eine (von vier) Aufgabe(n) aus einer schriftlichen Klausurarbeit (4 Stunden Arbeitszeit):</u>**

> Der Graph einer Polynomfunktion fünften Grades f besitze zwei Sattelpunkte $P\,(u/y_P)$ und $Q\,(v/y_Q)$.
>
> (a) Kann man bei Vorgabe der vier Koordinaten u, v, y_P und y_Q $(u \neq v)$ den Funktionsterm von f ermitteln? Wenn ja, wie, wenn nein, warum nicht?
>
> (b) Was kann man aufgrund der in der Angabe enthaltenen Information über das Monotonieverhalten von f aussagen? Begründe deine Antwort!
>
> (c) Wie viele Möglichkeiten für die Anzahl der Nullstellen von f gibt es (achte auf die Vielfachheit!)? Begründe deine Antwort(en)!
>
> (d) Begründe, warum der Graph von f noch einen weiteren Wendepunkt W besitzen muss! Was kann man genauer über W (Lage, Steigung der Wendetangente etc.) aussagen?

Probiere zunächst eigenständig Erkenntnisse an den Tag zu bringen (Hinweis: O. B. d. A. kann P etwa im Ursprung zu liegen kommen!) und greife möglichst erst nach eigenständigen Überlegungen (selbst wenn sie "nur" verbaler Natur – selbstverständlich im mathematisch argumentierenden Sinn! – sein sollten) auf folgende Arbeitsaufträge zurück [Sollte es deiner Übung förderlich sein, kannst und sollst du auch durchaus wieder vom psychologischen Hinweis aus Aufgabe 87) Gebrauch machen!]:

Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung $\boxed{y = f(x) = \frac{b}{a^5} \cdot \left(6x^5 - 15ax^4 + 10a^2x^3\right)}$.

a) Zeige im Rahmen einer Kurvendiskussion, dass Γ_f zwei Sattelpunkte aufweist. Erläutere hiebei insbesondere die geometrische Bedeutung der Parameter a und b!

b) Begründe, warum Γ_f dann überdies noch über einen "gewöhnlichen Wendepunkt" W verfügen muss und beweise, *dass W der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke der Sattelpunkte ist*.

+c) Wegen der *Eigenschaft aus b)* liegen somit alle drei Wendepunkte auf einer Gerade g, welche die Wendetangente an Γ_f in W ebendort schneidet. Berechne für den Fall, dass a=99 und b=8 gilt, das Maß des spitzen Schnittwinkels zwischen g und der Wendetangente.

101) Gegeben ist die Polynomfunktion f mit der Funktionsgleichung $\boxed{y = f(x) = x^5 - 10x^3 - 20x^2 + 120x}$.

a) Berechne (auch wenn du nicht mehr so jung bist wie der "Bub" in nebenstehender Abbildung! ☺) das Produkt $(x^2-x-2)\cdot(x+1)$!

b) Zeige, dass Γ_f einen Flachpunkt F aufweist. Was folgt daraus für die mögliche Anzahl an Null- und Extremstellen ("Prognose")? Begründe!

c) Zeige ferner, dass Γ_f einen Sattelpunkt S aufweist. Welche Einfluss hat dies auf deine "Prognose"?

d) Berechne die Koordinaten des zweiten gemeinsamen Punkts P von Γ_f mit seiner Flachpunkttangente!

102) Gegeben ist die Polynomfunktion f mit der Funktionsgleichung $\boxed{y = f(x) = x^5 - 5x^4 + 40x^2}$.

a) Berechne [auch wenn du nicht mehr so jung bist wie der "Bursche" rechts (aber in nebenstehender Abbildung zumindest bereits ein Jahr älter als bei Aufgabe 101! ☺)] das Produkt $(x^2-x-2)\cdot(x-2)$!

b) Zeige, dass Γ_f einen Flachpunkt F aufweist. Was folgt daraus für die mögliche Anzahl an Null- und Extremstellen? Begründe!

b) Begründe, warum Γ_f wegen der Existenz von F *einen Wendepunkt W* aufweisen muss und klassifiziere *selbigen*!

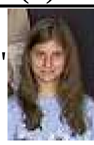
c) Untersuche sowohl für die Wendetangente als auch die Flachpunkttangente, ob selbige nebst W bzw. F noch weitere gemeinsame Punkte haben und berechne ggf. deren Koordinaten!

103) Gegeben ist die Polynomfunktion f mit der Funktionsgleichung $\boxed{y = f(x) = x^5 - 10x^4 + 30x^3}$.

a) Zeige, dass Γ_f einen Flachpunkt F und einen Wendepunkt aufweist.

b) Klassifiziere den Wendepunkt und untersuche sowohl für die Wendetangente als auch die Flachpunkttangente, ob selbige nebst dem Wende- bzw. Flachpunkt noch weitere gemeinsame Punkte mit Γ_f hat und berechne ggf. deren Koordinaten!

104) Gegeben ist die Polynomfunktion f mit der Funktionsgleichung $\boxed{y = f(x) = x^5 - 40x^3 - 160x^2}$.



a) Berechne (auch wenn du nicht mehr so jung bist wie das "Mädel" in nebenstehender Abbildung! ☺) das Produkt $(x^2-2x-8)\cdot(x+2)$!

b) Zeige, dass Γ_f einen Flachpunkt F aufweist.
Was folgt daraus für die mögliche Anzahl an Null- und Extremstellen? Begründe!

c) Begründe, warum Γ_f wegen der Existenz von F *einen Wendepunkt W* aufweisen muss und klassifiziere *selbigen*!

d) Untersuche sowohl für die Wendetangente als auch die Flachpunkttangente, ob selbige nebst W bzw. F noch weitere gemeinsame Punkte haben und berechne ggf. deren Koordinaten!

105) Gegeben ist die Polynomfunktion f mit der Funktionsgleichung $\boxed{y = f(x) = x^5 - 10x^4 + 320x^2 + 880x}$.

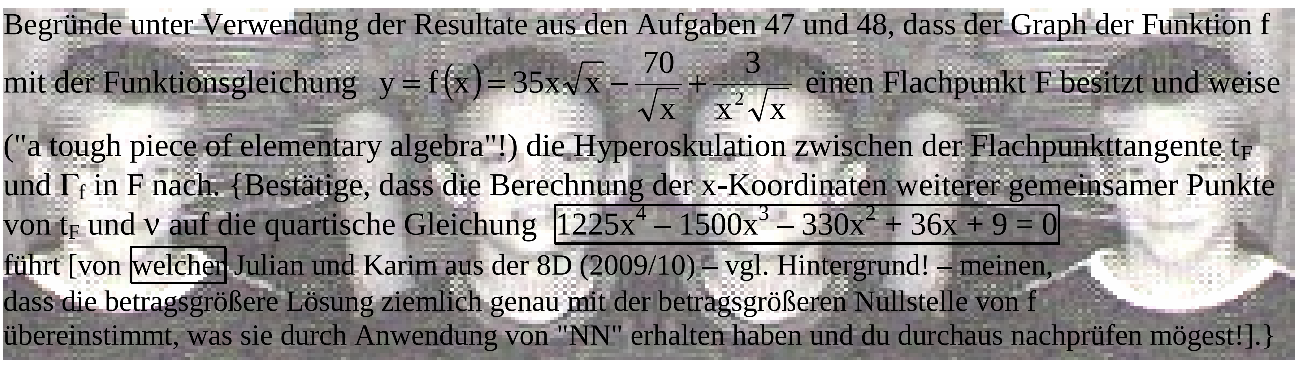
a) Berechne (auch wenn du nicht mehr so jung bist wie das "Mädchen" in nebenstehender Abbildung! ☺) das Produkt $(x^2-2x-8)\cdot(x-4)$!

b) Zeige, dass Γ_f einen Flachpunkt F aufweist.
Was folgt daraus für die mögliche Anzahl an Null- und Extremstellen ("Prognose 1")? Begründe!

c) Zeige ferner, dass Γ_f einen Sattelpunkt S aufweist.
Welche Einfluss hat dies auf deine "Prognose"?

d) Berechne die Koordinaten des zweiten gemeinsamen Punkts P von Γ_f mit seiner Flachpunkttangente!

Fortsetzung der Aufgaben 47 und 48:



106) Begründe unter Verwendung der Resultate aus den Aufgaben 47 und 48, dass der Graph der Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = 35x\sqrt{x} - \frac{70}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2\sqrt{x}}$ einen Flachpunkt F besitzt und weise ("a tough piece of elementary algebra"!) die Hyperoskulation zwischen der Flachpunkttangente t_F und Γ_f in F nach. {Bestätige, dass die Berechnung der x-Koordinaten weiterer gemeinsamer Punkte von t_F und ν auf die quartische Gleichung $\boxed{1225x^4 - 1500x^3 - 330x^2 + 36x + 9 = 0}$ führt [von welcher Julian und Karim aus der 8D (2009/10) – vgl. Hintergrund! – meinen, dass die betragsgrößere Lösung ziemlich genau mit der betragsgrößeren Nullstelle von f übereinstimmt, was sie durch Anwendung von "NN" erhalten haben und du durchaus nachprüfen mögest!].}

107) a) Zeige, dass die Kurve ν mit nebenstehender Gleichung einen Flachpunkt F aufweist und berechne seine Koordinaten!

$$\boxed{\nu : y = \frac{120}{x^2} - \frac{240}{x^3} + \frac{144}{x^4}}$$

b) Weise in F die Hyperoskulation zwischen der Flachpunktangente t_F und ν nach und prognostiziere inkl. Begründung die mögliche bzw. sichere Anzahl weiterer gemeinsamer Punkte von t_F und ν.

c) Berechne die Koordinaten weiterer gemeinsamer Punkte von t_F und ν!

d) Beschreibe das Monotonie- und Krümmungsverhalten von ν! Gibt es Schnittpunkte mit der x-Achse?

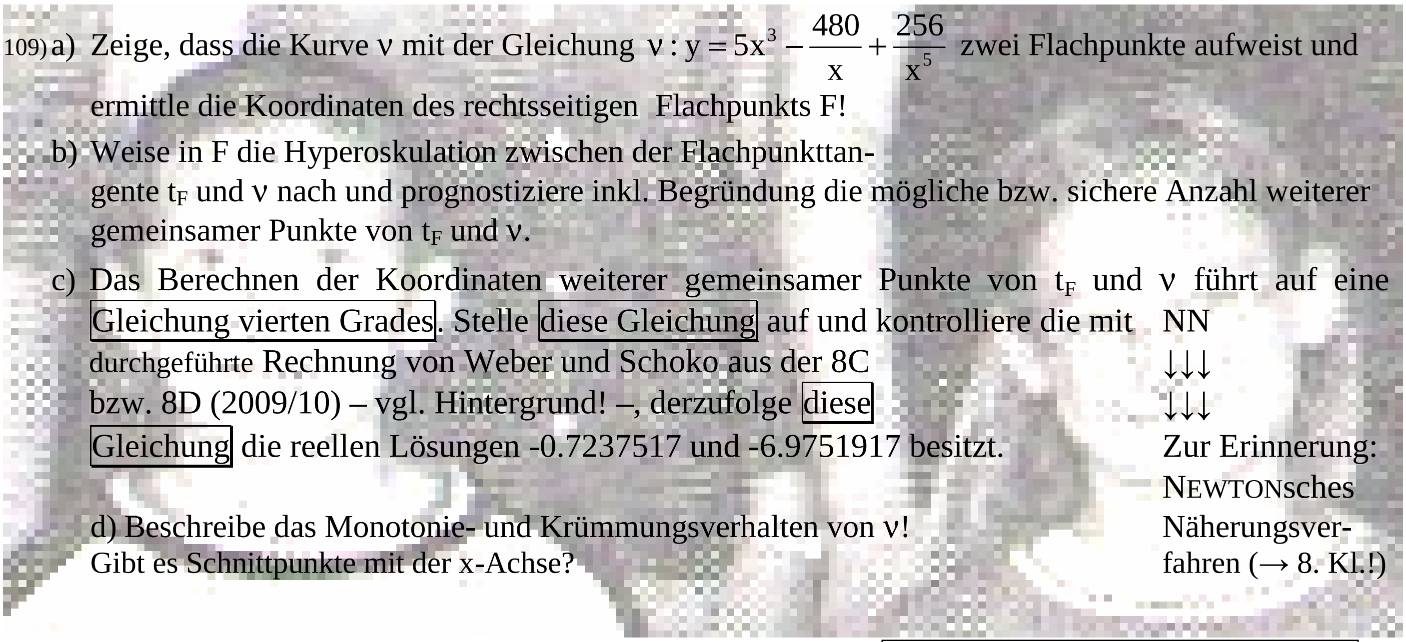
108) a) Zeige, dass die Kurve ν mit nebenstehender Gleichung einen Flachpunkt F aufweist und ermittle die Koordinaten von F!

$$\boxed{\nu : y = \frac{5}{x^3} - \frac{6}{x^4} + \frac{2}{x^5}}$$

b) Weise in F die Hyperoskulation zwischen der Flachpunkttangente t_F und ν nach und prognostiziere inkl. Begründung die mögliche bzw. sichere Anzahl weiterer gemeinsamer Punkte von t_F und ν.

c) Berechne die Koordinaten weiterer gemeinsamer Punkte von t_F und ν!

d) Beschreibe das Monotonie- und Krümmungsverhalten von ν! Gibt es Schnittpunkte mit der x-Achse?



109) a) Zeige, dass die Kurve ν mit der Gleichung $\nu : y = 5x^3 - \frac{480}{x} + \frac{256}{x^5}$ zwei Flachpunkte aufweist und ermittle die Koordinaten des rechtsseitigen Flachpunkts F!

b) Weise in F die Hyperoskulation zwischen der Flachpunkttangente t_F und ν nach und prognostiziere inkl. Begründung die mögliche bzw. sichere Anzahl weiterer gemeinsamer Punkte von t_F und ν.

c) Das Berechnen der Koordinaten weiterer gemeinsamer Punkte von t_F und ν führt auf eine Gleichung vierten Grades. Stelle diese Gleichung auf und kontrolliere die mit durchgeführte Rechnung von Weber und Schoko aus der 8C bzw. 8D (2009/10) – vgl. Hintergrund! –, derzufolge diese Gleichung die reellen Lösungen -0.7237517 und -6.9751917 besitzt.

NN
↓↓↓
↓↓↓
Zur Erinnerung: NEWTONsches Näherungsverfahren (→ 8. Kl.!)

d) Beschreibe das Monotonie- und Krümmungsverhalten von ν! Gibt es Schnittpunkte mit der x-Achse?

110) a) Zeige, dass die Kurve ν mit nebenstehender Gleichung einen Flachpunkt F aufweist und berechne seine Koordinaten!

$$\boxed{y = 2x^2 - \frac{500}{x} + \frac{3125}{x^4}}$$

b) Weise in F die Hyperoskulation zwischen der Flachpunktangente t_F und ν nach und prognostiziere inkl. Begründung die mögliche bzw. sichere Anzahl weiterer gemeinsamer Punkte von t_F und ν.

c) Berechne die Koordinaten weiterer gemeinsamer Punkte von t_F und ν!

d) Beschreibe das Monotonie- und Krümmungsverhalten von ν! Gibt es Schnittpunkte mit der x-Achse?

111) Gegeben ist die Polynomfunktion f mit der Funktionsgleichung $\boxed{y = f(x) = x^6 - 5x^4 + 15x^2}$.
Zeige, dass Γ_f zwei Flachpunkte besitzt und ziehe daraus Rückschlüsse auf den gesamten Kurvenverlauf!

112) Gegeben ist die Polynomfunktion f mit der Funktionsgleichung $\boxed{y = f(x) = x^6 - 6x^5 + 10x^4}$.
Zeige, dass Γ_f zwei Flachpunkte besitzt und ziehe daraus Rückschlüsse auf den gesamten Kurvenverlauf!