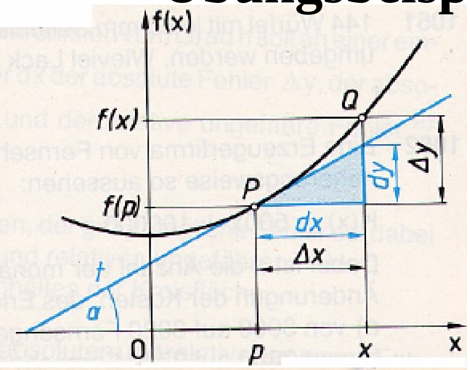
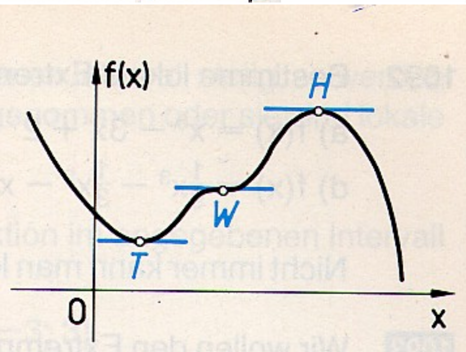
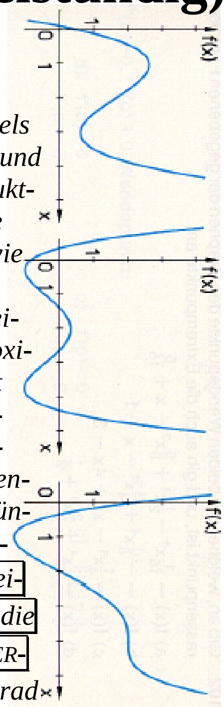
Übungsbeispiele für die 1. Schularbeit (zweistündig)

(7D, Realgymnasium, PM3, SS 2009)



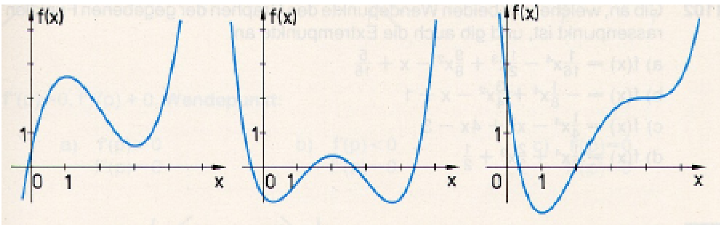




*Diese Beispiele sollen durch jene für den ersten Teil des Kapitels "Differentialrechnung" relevanten Grundaufgaben {Herleiten und Anwenden der Summen-, Differenzen-, Ketten-, Potenz-, Produkt- und Quotientenregel, ebenso der Differentiationsregeln für die elementartranszendenten Funktionen $y=e^x$, $y=\ln x$, $y=\sin x$ sowie $y=\cos x$, Durchführen von Kurvendiskussionen [Extrem- und Wendestellen inkl. Klassifikation selbiger, analytische Beschreibung von Tangenten (im Sinne der bestmöglichen Linearapproximation) an Graphen differenzierbarer Funktionen sowie damit einhergehender Schnitt- und Winkelberechnungsaufgaben, Beschreibung des Monotonie- und Krümmungsverhaltens, Flachpunkte, Oskulations- bzw. Hyperoskulationseigenschaft der Wende- bzw. der Flachpunkttangente, verbales Erklären und Begründen sowie "Prognosen" von Kurvenverläufen] anhand von Polynomfunktionen (inkl. dem Abspalten von Lösungen – von Gleichungen der Form f(x)=0 oder f´(x)=0 oder f´´(x)=0, wobei f die in Rede stehende Polynomfunktion bezeichnet – mittels HORNER-Schema) dritten bis sechsten Grades (wobei mit steigendem Grad vermehrt nur mehr Sondertypen zu behandeln sind) sowie von rationalen Funktionen} führen, die du bei der ersten Schularbeit **<u>in jedem Fall</u>** unter Beweis stellen wirst müssen.*

↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑

Auch hier ist insbesondere das obig Erwähnte über das Abspalten von Lösungen oftmals vonnöten!!!



ACHTUNG! Ein bloßes "Auswendiglernen" der Beispiele ist sicher keine ausreichende Vorbereitung, da du deine erworbenen Kenntnisse bei der Schularbeit auf Problemstellungen anzuwenden hast, die zwar nicht gänzlich neuartig, aber zum Teil in der Form wie bei der Schularbeit gestellt in dieser Aufgabensammlung nicht enthalten sind! Ein eigenständiges Lösen dieser Aufgaben (bis auf jene, die wir in diversen Schulübungen gemeinsam bearbeiten werden) ist eine absolute Notwendigkeit für ein angemessenes Übungsprogramm!

1) Bilde die erste Ableitungsfunktion der Funktion f mit der Funktionsgleichung $\boxed{y = f(x) = x^2}$ und überprüfe die Verträglichkeit mit der Spaltform der Parabeltangente!

2) Bilde die erste Ableitungsfunktion der Funktion f mit der Funktionsgleichung $\boxed{y = f(x) = kx}$ (wobei k eine Konstante ist – Bedeutung von k?) und überprüfe die Verträglichkeit mit der seit der 4. Klasse bekannten Bedeutung von k!

3) Bilde die erste Ableitungsfunktion der Funktion f mit der Funktionsgleichung $\boxed{y = f(x) = c}$ (wobei c eine Konstante ist) und überprüfe die Verträglichkeit mit dem aufgrund des Funktionsgraphen von f nahe liegend zu vermutenden Resultat!

4) Überlege (n wir gemeinsam im Unterricht!), wie man die Summen- bzw. Differenzenfunktion zweier differenzierbarer Funktionen differenziert!

5) Bilde die erste Ableitungsfunktion der Funktion f mit der Funktionsgleichung $\boxed{y = f(x) = \sqrt{x}}$ und überprüfe die Verträglichkeit mit der Spaltform der Parabeltangente!

6) Um analytisch die Tangente an einen Kreis zu bestimmen, gehe(n wir im Unterricht!) von der Kreisgleichung $\boxed{k : x^2 + y^2 = r^2 \ (*)}$ aus und überlege(n wir), wie man die (eine der!) durch Auflösen von (*) nach y resultierende(n) Funktion(en!) differenziert!

7) Bilde die erste Ableitungsfunktion der natürlichen Exponentialfunktion, also der Funktion f mit der Funktionsgleichung $\boxed{y = f(x) = e^x}$!

8) Bilde unter Verwendung der in Aufgabe 7) gewonnenen Differentiationsregel sowie der **KETTENREGEL** die erste Ableitungsfunktion der natürlichen Logarithmusfunktion, also der Funktion f mit der Funktionsgleichung $\boxed{y = f(x) = \ln x}$!

9) Alternative zu Aufgabe 7 (**HAUSÜBUNG!**):
Bilde unter Verwendung der in Aufgabe 8) gewonnenen Differentiationsregel sowie der **KETTENREGEL** die erste Ableitungsfunktion von $\boxed{y=f(x)=e^x}$!
Äußere allgemeine kritische Gedanken über diese Vorgehensweise!

10) Bilde unter Verwendung der in Aufgabe 8) gewonnenen Differentiationsregel sowie der **KETTENREGEL** die erste Ableitungsfunktion von $\boxed{y = f(x) = x^\alpha}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig, "allgemeine Potenzfunktion")!

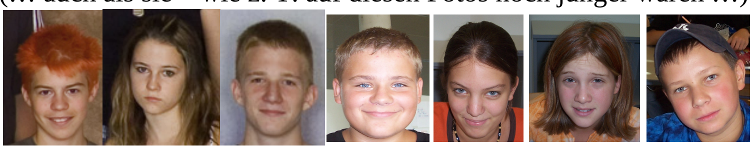
11) Beweise unter Verwendung des "Trigonometrischen PYTHAGORAS" (5. Klasse!) sowie der **KETTENREGEL** die Differentiationsregeln $\boxed{D(\sin x) = \cos x}$ sowie $\boxed{D(\cos x) = -\sin x}$!

12) Überlege (n wir gemeinsam im Unterricht!), wie man die Produktfunktion zweier differenzierbarer Funktionen differenziert (Aufgabe 8 und **KETTENREGEL** verwenden)!

13) (**HAUSÜBUNG!**): Überlege dir, wie man die Quotientenfunktion zweier differenzierbarer Funktionen differenziert (Aufgabe 8 und **KETTENREGEL** verwenden)!

Für Denker eine zweite (von vielen weiteren) Variante(n): Gehe von $y = \frac{u}{v}$ aus, mache diese Funktionsgleichung bruchfrei und verwende die Produktregel (Aufgabe 12)!

↓↓
Auswahl an "hochgradig Denkverdächtigen" … ☺
(… auch als sie – wie z. T. auf diesen Fotos noch jünger waren …)



14) Leite aus der Produktregel die sogenannte "*REGEL VOM KONSTANTEN FAKTOR*" ab, indem du eine der beiden "Faktorfunktionen" mit einer Konstanten belegst. Worin liegt der Unterschied zu einem konstanten Summanden?

15) Differenziere die Tangensfunktion!

16) Differenziere: $y = f(x) = x^4 - 4x^3 + 27$

17) Differenziere: $y = f(x) = -x^4 + 2x^3 - 2tx + t$

18) Fortsetzung von Aufgabe 17): Löse die Gleichung $f''(x) = 0$!

19) Differenziere: $y = f(x) = x^4 + qx^3 + q^2x^2 + q^3x + q^4$

20) Fortsetzung von Aufgabe 19): Löse die Gleichung $f''(x) = 0$!

21) Differenziere: $y = f(x) = x^4 - 8tx^3 + 18t^2x^2$

22) Fortsetzung von Aufgabe 21): Löse die Gleichungen $f'(x) = 0$ sowie $f''(x) = 0$!

23) Differenziere: $y = f(x) = x^4 - 11x^2$

24) Fortsetzung von Aufgabe 23): Löse die Gleichung $f(x) = f''(x)$!

25) Differenziere: $y = f(x) = x^4 - 12x^3 + 30x^2 + 100x + 57$

26) Fortsetzung von Aufgabe 25): Löse die Gleichung $f''(x) = 0$!

27) Differenziere: $y = f(x) = x + \frac{864}{x^2}$

28) Differenziere: $y = f(x) = x^2 + \frac{36}{x}$

29) Differenziere: $y^2 = x^3$

30) Differenziere: $y = f(x) = \frac{84672}{x^2+432}$

31) Differenziere $f'(x)$ aus Aufgabe 30) nochmals!

32) Differenziere: $y^2 = x^2 \cdot (x+3)$

33) Differenziere: $y = f(x) = \frac{196x^3}{x^2+363}$

34) Differenziere $f'(x)$ aus Aufgabe 33) nochmals!

35) Rechne nach, dass die Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = x^2 \cdot e^x$ die Bedingung $\boxed{y'' - 2y' + y = 2e^x}$ ("Differentialgleichung") erfüllt.

↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓

Man sagt in diesem Zusammenhang auch, dass f eine (partikuläre) Lösung der Differentialgleichung ist. (Wie man Differentialgleichungen löst, lernst du – wenn überhaupt! – erst auf der Universität!)

36) Zeige, dass $y = f(x) = e^x \cdot \sin x$ eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung $y''' - 2y' + 4y = 0$ ist!

37) Zeige, dass unabhängig vom Parameter t in der Schargleichung $y = \frac{\sqrt{3}}{18} \cdot x^3 + tx^2 + 2\sqrt{3} \cdot t^2 x + 4t^3$ y eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung $y' \cdot y'' \cdot y''' = y$ ist.

38) Zeige, dass $y = f(x) = \frac{x^4}{144} + \frac{x^3}{6}$ eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung $y''^2 = y + x^2$ ist!

39) Differenziere: $y = f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2$

40) Fortsetzung von Aufgabe 39): Löse die Gleichung $f''(x) = 0$!

41) Differenziere: $y = f(x) = x^5 - 10x^4 + 30x^3$

42) Fortsetzung von Aufgabe 41): Löse die Gleichung $f''(x) = 0$!

43) Differenziere: $y = f(x) = x^6 - 5x^4 + 15x^2$

44) Fortsetzung von Aufgabe 43): Löse die Gleichung $f''(x) = 0$!

45) Differenziere: $y = f(x) = x^6 - 6x^5 + 10x^4$

46) Fortsetzung von Aufgabe 45): Löse die Gleichung $f''(x) = 0$!

47) Differenziere: $y = f(x) = 35x\sqrt{x} - \dfrac{70}{\sqrt{x}} + \dfrac{3}{x^2\sqrt{x}}$

48) Fortsetzung von Aufgabe 47): Löse die Gleichung $f''(x) = 0$!

49) Differenziere: $y = f(x) = \dfrac{p^4x^2 + p^3x + p^2}{px + 1}$

50) Fortsetzung von Aufgabe 49): Löse die Gleichung $f'(x) = 0$!

51) Differenziere: $y = f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 6x + 3}$

52) Fortsetzung von Aufgabe 51): Löse die Gleichung $f'(x) = 0$!

53) Differenziere: $y = f(x) = \dfrac{1}{9} \cdot \dfrac{27x^2 + 1}{3x^2 + 1}$

54) Fortsetzung von Aufgabe 53): Löse die Gleichung $f''(x) = 0$!

55) Differenziere: $y = f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x^2 + 1}$

56) Fortsetzung von Aufgabe 55): Zeige, dass für die Lösungen x_1 und x_2 der Gleichung $f'(x) = 0$ die Beziehung $x_1 \cdot x_2 = -1$ gilt! (*Hinweis:* VIETA-Gruppe 5. Klasse)

57) Differenziere: $y = f(x) = \dfrac{x}{x^3 + 1}$

58) 1. Fortsetzung von Aufgabe 57): Rechne nach, dass $f'\left(-\sqrt{3} - 1\right) = f'\left(-\sqrt{3} + 1\right)$ gilt!

59) 2. Fortsetzung von Aufgabe 57): Löse die Gleichung $f''(x) = 0$!

60) Differenziere: $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 3}$

61) Fortsetzung von Aufgabe 60): Löse die Gleichung $f''(x) = 0$!

62) Differenziere sowohl $y = f(x) = \frac{1}{3} \cdot x\sqrt{x}$ als auch $y = g(x) = \dfrac{12\sqrt{6}}{x}$!

63) Löse die Gleichung $f(x) = g(x)$ und berechne für die Lösung x jeweils $f'(x)$ und $g'(x)$! Welchen Schluss ziehst du aus diesen beiden Resultaten?

64) Überprüfe, dass die rationale Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = \dfrac{x^4}{x+1}$ eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung $y' = \dfrac{4y}{x} - \dfrac{y^2}{x^4}$ ist.

65) Verifiziere, dass die rationale Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = \dfrac{x}{(x+1)^3}$ eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung $y' = \dfrac{3}{(x+1)^4} - \dfrac{2y}{x}$ ist.

66) Kontrolliere, dass die rationale Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$ für $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{2\}$ eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung $y' = \sqrt{\dfrac{y}{x}} - \dfrac{2y}{x^2} - \dfrac{8x}{(x-2)^3}$ ist.

67) Zeige, dass die rationale Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = \dfrac{x}{(x+1)^5}$ eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung $y' = \dfrac{5}{(x+1)^6} - \dfrac{4y}{x}$ ist.

68) Weise nach, dass die rationale Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = \dfrac{x^2}{x^5+1}$ eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung $y' = \dfrac{2y}{x} - 5x^2y^2$ ist.

69) Beweise, dass die rationale Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = \dfrac{x^5}{x+1}$ eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung $y' = \dfrac{5y}{x} - \dfrac{y^2}{x^5}$ ist.

70) Überprüfe, dass die rationale Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = \dfrac{x^3}{x+1}$ eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung $y' = \dfrac{2y}{x} + \dfrac{y^2}{x^4}$ ist.

71) Verifiziere, dass die rationale Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = \dfrac{x}{(x^2+1)^3}$ eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung $y' = \dfrac{6}{(x^2+1)^4} - \dfrac{5y}{x}$ ist.

72) Kontrolliere, dass die rationale Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = \dfrac{x^3}{(x-3)^2}$ für $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{3\}$ eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung $y' = \sqrt{\dfrac{y}{x}} - \dfrac{3y}{x^2} + \dfrac{18x}{(x-3)^3}$ ist.

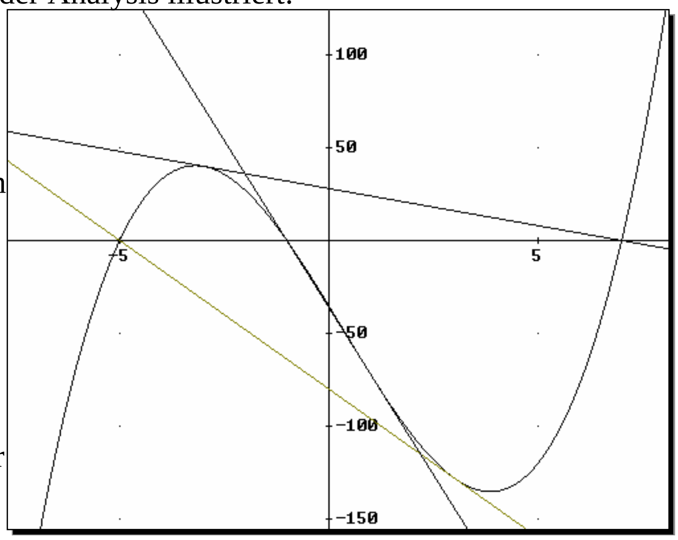
73) Diskutiere die Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 504x$.

74) Diskutiere die Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = x^3 + 6x^2 - 135x$.

75) Diskutiere die Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = x^3 - 39x^2 + 360x$.

76) In nebenstehender Abbildung ist folgender Lehrsatz der Analysis illustriert:

SATZ. Sind $N_1(a|0)$, $N_2(b|0)$ und $N_3(c|0)$ die Nullstellen einer Polynomfunktion dritten Grades f und ferner $P_1(x_1|f(x_1))$, $P_2(x_2|f(x_2))$ sowie $P_3(x_3|f(x_3))$ samt ihren Tangenten t_1, t_2 und t_3 an Γ_f in P_1, P_2 und P_3 jene Punkte auf Γ_f, die durch $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = \frac{b+c}{2}$ sowie $x_3 = \frac{a+c}{2}$ festgelegt sind, dann gelten stets die Inzidenzen $N_3 \in t_1$, $N_1 \in t_2$ sowie $N_2 \in t_3$.



Verifiziere diesen Satz anhand der Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = x^3 - x^2 - 37x - 35$.

77) Die Koeffizienten b_0, b_1, b_2 und b_3 in der Funktionsgleichung $y = f(x) = b_0x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3$ bilden eine geometrische Folge mit dem Startglied $b_0=b$ und dem konstanten Faktor q.

a) Zeige, dass f keine lokalen Extremstellen besitzt.

b) Berechne sowohl die Koordinaten des Wendepunktes W(u|v) als auch die Steigung der Wendetangente t_W von Γ_f in Abhängigkeit von b und q.

c) Zeige, dass t_W für $b = \frac{\sqrt{30}}{60}$ und $q = 3$ auf die Gerade durch den Koordinatenursprung und W normal steht.

78) Gegeben ist die Polynomfunktion dritten Grades mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = x^3 - 2x^2$.

a) Skizziere den Graphen Γ_f ("Kurvendiskussion light")!

b) Rechne nach, dass Γ_f von der Tangente an Γ_f im Kurvenpunkt $P(1|f(1))$ nochmals im Hochpunkt *geschnitten* wird.

c) Kontrolliere durch Rechnung, dass die Kurvennormale n an Γ_f in ebenjenem Punkt P durch die rechtsseitige Nullstelle von f verläuft und berechne auch die Koordinaten des dritten Schnittpunkts von n mit Γ_f!

79) Diskutiere die Funktionen f und g mit nebenstehenden Funktionsgleichungen und verifiziere, dass Γ_f und Γ_g einander im *gewöhnlichen Wendepunkt* von Γ_g rechtwinklig schneiden!

$$y = f(x) = \frac{\sqrt{7}}{56} \cdot \left(x^4 - 4x + 3\right)$$

$$y = g(x) = \frac{\sqrt{7}}{56} \cdot \left(x^4 - 4x^3 + 27\right)$$

80) Beweise, dass jede Kurve aus der Kurvenschar mit der Gleichung $\boxed{y = -x^4 + 2x^3 - 2tx + t}$ genau zwei Wendepunkte besitzt und berechne deren Koordinaten in Abhängigkeit des *Scharparameters* t!

81) a) Weise nach, dass die Kurven mit den Gleichungen $y = x^4 - 4tx^3$ und $y = 18t^2x^2 - 108t^3x + 135t^4$ einander im gemeinsamen Tiefpunkt T oskulieren und berechne die Koordinaten von T in Abhängigkeit des *Scharparameters* t!

b) Begründe, warum die beiden Kurven noch einen zweiten gemeinsamen Punkt S aufweisen müssen und berechne dessen Koordinaten (wiederum in Abhängigkeit von t).

82) Beweise folgenden Lehrsatz der Analysis:

SATZ. Bilden die Koeffizienten der Funktionsgleichung einer Polynomfunktion vierten Grades f eine geometrische Folge, so ist Γ_f wendepunktfrei.

83) Die Koeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3 und a_4 in der Funktionsgleichung $y = f(x) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$ bilden eine arithmetische Folge $\boxed{\langle a_n \rangle = \langle a_0 + nd \rangle}$. Beweise, dass Γ_f genau dann einen Flachpunkt besitzt, wenn $\boxed{3d^2 = 5a_2a_4}$ gilt.

84) Für die via $y = x^4 - 8tx^3 + 18t^2x^2$ festgelegte Kurvenschar sind folgende Punkte zu bearbeiten:

a) Beweise, dass jeder Vertreter der Schar einen Sattelpunkt aufweist.

b) Welche Aussagen lassen sich aufgrund von a) über Nullstellen, Extremstellen und weitere Wendestellen treffen?

c) Quantifiziere deine Erkenntnisse aus a) und b)!

+d) Zeige, dass die Wendepunkte der Kurvenschar auf den Kurven mit den Gleichungen $y = \frac{1}{3} \cdot x^4$ und $y = 11x^4$ liegen.

85) a) Zeige, dass die Graphen der Funktionen f und g mit den Funktionsgleichungen $\boxed{y = f(x) = \mathbf{2x^2}}$ und $\boxed{y = g(x) = \mathbf{32x^3 + 10x^2}}$ einen gemeinsamen Tiefpunkt T besitzen (Achtung! Auch mit Brüchen muss nach wie vor gerechnet werden können!), also einander in T berühren. Wie viele Schnittpunkte fallen daher zusammen?

b) Begründe, warum Γ_f und Γ_g wegen a) noch einen weiteren Schnittpunkt S aufweisen müssen, berechne seine Koordinaten und zeige, dass Γ_f und Γ_g einander in S rechtwinklig schneiden.

86) Die Polynomfunktionen f und g mit den rechts angeführten Funktionsgleichungen weisen offensichtliche Ähnlichkeiten auf.

$$y = f(x) = \frac{1}{80} \cdot \left(x^4 - 12x^3 + 30x^2 + 100x + 57\right)$$

$$y = g(x) = \frac{-1}{80} \cdot \left(x^4 - 12x^3 + 30x^2 - 28x - 167\right)$$

a) Welche gemeinsamen Eigenschaften (bis auf den Grad! ☺) lassen sich a priori feststellen?

b) Diskutiere beide Funktionen, wobei die exakte Bestimmung der Nullstellen von g unterbleiben kann.

(Es sei denn, du machst dir die Mühe, im web nach dem "NEWTONschen Näherungsverfahren" (NN) zu suchen und wendest es auf g an. ANMERKUNG. … das schadet auch G-Schülern keinesfalls und Rg-Schüler fangen dann in der 8. Klasse – Da wird NN im Wintersemester behandelt! – nicht "ganz bei Null" an!)

87) Via $\boxed{y = x^4 - 2(a+b)x^3 + 6abx^2,\ a \neq b \neq 0}$ ist eine zweiparametrige Schar von Polynomfunktionen vierten Grades gegeben.

Wage dich an die folgende äußerst umfangreiche und damit zum Übungszweck äußerst geeignete Aufgabe schrittweise, indem du für a und b zunächst konkrete Zahlen wählst, die Aufgabenstellungen mit diesen Zahlen beschreitest, damit die allgemeinen Resultate aus dem folgenden Text zunächst ("nur") verifizierst und (wenn überhaupt) erst später (vielleicht auch erst nach dem Durchrechnen der Aufgabe mit weiteren konkreten Zahlen für a und b!?) den Schritt waagst, die Aufgabe vom Anfang bis zum Ende mit den Parametern a und b zu rechnen.

↓↓

ÜBER KURZ ODER LANG SOLLTEST DU NUN WIRKLICH DIE SCHEU VOR "RECHNUNGEN ALLGEMEINER(ER) ART" ÜBERWINDEN UND DICH DARIN (NICHT ZULETZT FÜR DIE MATURA!) ÜBEN!

Beweise:

a) Jeder Vertreter der Schar besitzt im Ursprung einen Tiefpunkt (Schwierigkeitsstufe 0).

b) Jeder Vertreter der Schar besitzt die Wendepunkte $\boxed{W_1(a|4a^3b-a^4)}$ und $\boxed{W_2(b|4ab^3-b^4)}$ [Schwierigkeitsstufe 1]. Erläutere, wie sich die Darstellung von W_2 aus der von W_1 ergibt und begründe unter Bezugnahme auf die (Struktur der) obige(n) Schargleichung, warum dies so sein muss!

c) Die zu W_1 zugehörige Wendetangente hat mit der Kurve ferner noch den Punkt $\boxed{S_1(2b-a|3a^2(2b-a)^2)}$ gemeinsam. (Schwierigkeitsstufe 2)

d) Wie muss aufgrund deiner Beobachtung aus b) mutatis mutandis das zu c) analoge Resultat für W_2 lauten?

e) Die beiden Wendetangenten schneiden einander im Punkt $S\left(\frac{a+b}{2}\middle|3a^2b^2\right)$. (Schwierigkeitsstufe 3)

f) S und die Mittelpunkte der Strecken W_1W_2 und S_1S_2 liegen kollinear. (Schwierigkeitsstufe "0,5")

88) Gegeben ist die Polynomfunktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = a(x^4 - 4x + 3)$.

a) Beweise, dass f unabhängig vom Wert des Parameters a einen Flachpunkt besitzt. Welche Auswirkung hat a überhaupt auf die Gestalt der Kurve Γ_f?

b) Welche Aussagen lassen sich aufgrund von a) über Nullstellen, Extremstellen und weitere Wendestellen treffen?

c) Bestätige deine Prognosen [welche vor dem Weiterrechnen zu begründen sind, um aus Aufgabenteil b) keine Farce zu machen!] aus b) und quantifiziere sie!

d) Es sei g die Gerade durch den Flachpunkt F und den Tiefpunkt T. Zeige, dass die (komplexen) Schnittpunkte von g und Γ_f die (komplexen) Extrempunkte von Γ_f sind.

e) Berechne für den Parameterwert $a = \frac{19}{17}$ das Maß des spitzen Schnittwinkels zwischen g und der Flachpunkttangente!

89) Gegeben ist die Polynomfunktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = a(x^4 - 4x^3)$.

a) Beweise, dass f unabhängig vom Wert des Parameters a einen Sattelpunkt besitzt.
Welche Auswirkung hat a überhaupt auf die Gestalt der Kurve Γ_f?

b) Welche Aussagen lassen sich aufgrund von a) über Nullstellen, Extremstellen und weitere Wendestellen treffen?

c) Bestätige deine Prognosen [welche vor dem Weiterrechnen zu begründen sind, um aus Aufgabenteil b) keine Farce zu machen!] aus b) und quantifiziere sie in Abhängigkeit des Parameters a.

d) Rechne nach, dass sich die Steigung der schrägen Wendetangente t_W zur Steigung der Gerade g durch die beiden Wendepunkte unabhängig vom Wert des Parameters a wie 2:1 verhält.

+ e) Beweise, dass die Eigenschaft aus d) sogar für jeder Kurve aus der zweiparametrigen Schar mit der Schargleichung $y = a(x^4 - 4tx^3)$ gilt!

f) Überprüfe die Eigenschaft aus d) auch für die Funktion f aus Aufgabe 86)!

g) Überprüfe die Eigenschaft aus d) auch für die Funktion g aus Aufgabe 86)!

h) t_W schneidet Γ_f noch in einem weiteren Punkt P. Berechne dessen Koordinaten in Abhängigkeit von a!

i) Stelle in Abhängigkeit von a eine Gleichung der Tangente t_P an Γ_f in P auf!

j) Es sei nun $a = \frac{1}{10}$, ferner bezeichne h die Gerade durch den Tiefpunkt und den Sattelpunkt von Γ_f.
Ermittle das Maß des spitzen Schnittwinkels zwischen h und t_W!

k) Jetzt sei $a = \frac{10}{7}$. Berechne das Maß des spitzen Schnittwinkels zwischen t_P und t_W!

90) Gegeben ist die Polynomfunktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = \frac{\sqrt{2}}{16t^3}x^4 - \frac{\sqrt{2}}{4t^2}x^3, t > 0$.

a) Diskutiere die Funktion in Abhängigkeit des Parameters t [oder wähle – vgl. (ausführliche!) psychologische Anleitung zu Aufgabe 87)! – vorläufig für t eine dir angenehme Zahl!]!

b) Es sei W jener Wendepunkt von Γ_f mit schräger Wendetangente sowie n die Normale auf t_W durch W. Beweise, dass Γ_f von n ferner in der rechtsseitigen Nullstelle N geschnitten wird.

c) Haben n und Γ_f nebst N und W noch weitere gemeinsame Punkte (Rechnung oder Begründung!)?

91) **<u>Eine (von vier) Aufgabe(n) aus einer schriftlichen Klausurarbeit (4 Stunden Arbeitszeit):</u>**

1. **Thema: Analysis, Diskussion einer Polynomfunktion vierten Grades**
Vom Graphen Γ_f einer Polynomfunktion vierten Grades f kennt man die Nullstelle $N_1(-1/0)$ und den Flachpunkt $F(3/6)$, die Flachpunkttangente geht durch den Koordinatenursprung.

(a) Ermittle die Funktionsgleichung von f!

(b) Bevor du mit der Bearbeitung des "Diskutiere die Funktion und zeichne ihren Graphen über einem geeigneten Intervall mit selbst gewählten Maßeinheiten!" lautenden Arbeitsauftrages beginnst, beantworte jeweils mit einer kurzen Begründung folgende Fragen:

- Kann f Wendestellen besitzen?
- Wie viele Extremstellen kann f höchstens haben?
- Wie viele Nullstellen kann f höchstens aufweisen?

92) **Eine (von fünf) Aufgabe(n) aus einer dreistündigen Schularbeit (< 3 Stunden Arbeitszeit):**

Eine Polynomfunktion vierten Grades f, deren Graph durch den Koordinatenursprung verläuft, erfüllt die Differentialgleichung $y''^2 = y + x^2$.

(a) Ermittle die Funktionsgleichung von f [Res.: $y = x^4/144 + x^3/6$].

(b) Diskutiere die Funktion und zeichne ihren Graphen.

(c) Zeige, dass die Wendetangentenabschnitte zwischen den Schnittpunkten mit dem Graphen von f einander in ihrem Schnittpunkt im Verhältnis 3:1 teilen.

93) Gegeben ist die Polynomfunktion f mit der Funktionsgleichung $\boxed{y = f(x) = x^4 - 4tx^3 + 6t^2x^2}$.

a) Beweise, dass f für jeden Wert des Parameters t genau einen Flachpunkt F besitzt.

b) Was folgt aus a) für die mögliche Anzahl von Null-, Extrem- und Wendestellen? Begründe jeweils!

c) Stelle in F eine Gleichung der Flachpunkttangente t_F an Γ_f auf!

d) Können t_F und Γ_f nebst F noch weitere gemeinsame Punkte haben? Begründe deine Antwort!

e) Weise die Hyperoskulation zwischen t_F und Γ_f in F algebraisch nach!

f) Manuel aus der 8D (2009/10) berechnet trotz Scherereien im Hintergrund (n.f.u., Fabian! ☺) mittels *Integralrechnung* den Flächeninhalt A jenes Gebiets, welches von t_F, Γ_f sowie der Tiefpunkt-tangente begrenzt wird und erhält die Formel $A = \frac{3t^5}{40}$. *Könnte* das stimmen? Begründe deine Antwort!

94) Stelle im Punkt $P(1|y_P)$ des Funktionsgraphen Γ_f der Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = x^4 + 6x^3 + x^2$ eine Gleichung der Tangente t_P an Γ_f auf!

b) Berechne die Koordinaten weiterer gemeinsamer Punkte von t_P und Γ_f.
Was fällt dir auf? Verbalisiere deine Erkenntnis und ziehe daraus Schlüsse sowohl
i. (differential)geometrischer
als auch
ii. lerntechnischer Natur (Wie kannst du unter Verwendung dieser Erkenntnis deinen geschätzten Sitznachbarn sofort mit einer parallelen Übungsaufgabe beglücken?)!

c) Thomas $. und Thomas "Schoko" K. aus der 8D (2009/10) – vgl. die individuellen Nachdenkermienen im Hintergrund! – berechnen den Inhalt A des von t_P und Γ_f begrenzten Gebiets mittels *Integralrechnung* und erhalten beide das Resultat $A = \frac{625}{6}$. *Könnte* das stimmen? Begründe deine Antwort (Der Umstand, dass das Sprichwort "Zwei Idioten, ein Gedanke" hier offensichtlich NICHT anzuwenden ist, reicht als Begründung jedoch *nicht* aus!), wobei der Hinweis, nach einer zu t_P parallelen Tangente von Γ_f zu suchen, genügen soll.

95) Diskutiere die Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = x^4 - 6t^2x^2 + 8t^4$ mit dem Parameter t unter Berücksichtigung folgender Zusatzpunkte [Beachte hiebei wieder den psychologischen Hinweis zu Aufgabe 87)!]:

a) Sei S der zweite Schnittpunkt der Wendetangente t_W an Γ_f im linksseitigen Wendepunkt mit Γ_f sowie P jener Punkt auf Γ_f, in welchem die entsprechende Tangente an Γ_f parallel zu t_W verläuft. Beweise für die entsprechenden x-Koordinaten x_P, x_S und x_W die Gleichung $\boxed{x_P = x_S + x_W}$. Beschreibe die Lage von P!

b) Sei Q der rechtsseitige Schnittpunkt der Hochpunkttangente mit Γ_f, x_Q seine x-Koordinate, x_T die x-Koordinate des rechtsseitigen Tiefpunkts sowie k>1 das Verhältnis der positiven Nullstellen von f. Beweise die Gleichung $\boxed{x_Q = k \cdot x_T}$!

c) Beweise: Die Gerade g durch S und den rechtsseitigen Wendepunkt weist eine doppelt so große Steigung als t_W auf.

d) Berechne für den Parameterwert $\boxed{t = 0{,}79}$ das Maß des spitzen Schnittwinkels φ zwischen g und t_W!