§6. Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen stetiger Zufallsvariabler (Aufgaben 13 bis 18)

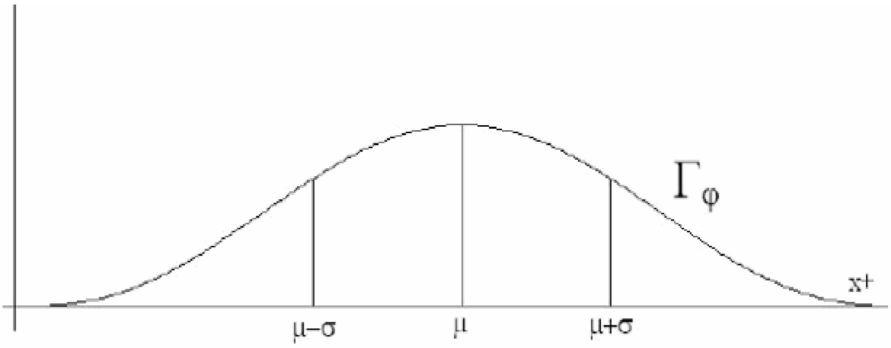
8D(Rg), 2009/10

13) a) Welche Beziehung muss zwischen den positiven reellen Zahlen a und b bestehen, damit die Funktion φ mit der Funktionsgleichung $\varphi(x) = x^a + x^b$ Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariable X mit $\Omega = [0;1]$ ist?

b) X beschreibe nun die in Stunden gemessene Arbeitszeit bei einer einstündigen Mathematik-Schularbeit (50 Minuten der Unterrichtsstunde sowie die nachfolgende zehnminütige Pause) und lasse sich (aufgrund entsprechender empirischer Untersuchungen) durch eine Dichtefunktion der Bauart aus 5a) modellieren. Ferner weiß man, dass die durchschnittliche Arbeitsdauer 39 Minuten beträgt.

- Wie viel Prozent der Schüler arbeiten dann gemäß dem stochastischen Modell in die Pause hinein?
- Nach welcher Zeitspanne haben 50% der Schüler abgegeben?

14) Eine stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega_X=[0;1]$ ist nach der Dichtefunktion φ mit der Funktionsgleichung $\boxed{\varphi(x)=140\cdot x^3\cdot(1-x)^3}$ verteilt und ergab sich nach jahr(zehnt)elangen empirischen Untersuchungen über die Arbeitsdauer bei vierstündigen schriftlichen Klausuren aus Russisch nach Annahmebeginn (drei Stunden nach dem eigentlichen Beginn).



a) Zeige, dass φ in der Tat Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariable X ist und bestimme den Erwartungswert $E(X)=\mu$.

b) Ermittle die Standardabweichung σ von X und berechne die Intervallwahrscheinlichkeit $P(|X-\mu|<\sigma)$. Interpretiere das Ergebnis!

c) Bei wie vielen von insgesamt 75 Teilnehmern (drei vom gleichen Prof. unterrichtete Parallelklassen!) sollte daher dem Modell gemäß die Arbeitsdauer um maximal σ von μ abweichen?

d) Befinden sich an den Stellen $\mu\pm\sigma$ (wie es ja bei der Normalverteilung der Fall ist!) Wendestellen von φ (ausführliche Begründung!)?

15) *Via* $\varphi(x)=\frac{2}{h(a+c)}\left(\frac{a-c}{h}\cdot x+c\right), a>0, c>0, h>0$ *ist die Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariable X mit* $\Omega_X=[0;h]$ *definiert.*

Dann gelten für den Median m bzw. den Erwartungswert $\mathbb{E}$ *von X die folgenden Formeln:*

$$m=\frac{\sqrt{2(a^2+c^2)}-2c}{2(a-c)}\cdot h,\quad \mathbb{E}=\frac{h}{3}\cdot\frac{2a+c}{a+c}$$

Beweise dies oder verifiziere diese Formeln für (a|c|h)=(7|17|360)!

16) Kurz vor seiner Pensionierung im Jahr 203X hält Prof. H. (in nebenstehender Abbildung simuliert gealtert! ☺) seine letzte dreistündige Schularbeit ab. Er betritt die Klasse pünktlich um 8^{15}, da er um 11^{00} ebenso pünktlich bei einer Lehrergeburtstagsfeier sein möchte und nimmt erst frühestens ab 10^{00} Arbeiten entgegen. Aufgrund langjähriger Erfahrung und statistischer Hilfeleistung seines Kollegen Prof. R. (unter Prof. H. ebenfalls simuliert gealtert! ☺) weiß er, dass die ab 10^{00} in Stunden gemessene Arbeitszeit als stetige Zufallsvariable mit dem Ereignisraum $\Omega = [0;1]$ nach der Dichtefunktion φ mit der Funktionsgleichung $\varphi(x)=a\cdot(x^n - x^{3n})$ verteilt ist.

a) Ermittle a (in Abhängigkeit von n)!

b) Da Prof. H. ja bekanntlich Deutsch und Französisch unterrichtet und sich für diese beiden Gegenstände verschiedene Werte des Exponenten n ergeben, ist der für Deutsch spezifische Exponent n zu ermitteln, wenn die durchschnittliche **Gesamt-**Arbeitszeit 2h40´32´´ beträgt.

c) Wie viel % der Schüler schreiben gemäß dem vorliegenden stochastischen Modell länger als die in b) angegebene Durchschnittszeit?

17) Fünf Gruppen von "Alt-Franzosen" (wie ihr es seid! ☺) schreiben im Mehrzwecksaal eines Wiener Gymnasiums zusammen ihre erste zweistündige Schularbeit. Insgesamt sind 102 Schüler anwesend, welche von 10^{10} bis 12^{10} Zeit haben, ihre Französischkenntnisse unter Beweis zu stellen, wobei erst ab 11^{10} (ab der Halbzeit mitten in der 11h-Pause!) Arbeiten entgegengenommen werden. Prof. H. und Prof. R. (siehe Abbildung rechts bei einem ihrer OpenAir-Konzerte im Juni 2007, ihr erinnert euch? ☺) halten die Aufsicht, wobei Prof. H. als Fachmann und Prof. R. as "statistical analyst" vertreten ist. Letzterer möchte anhand dieser Stichprobe die Hypothese überprüfen, derzufolge die von 11^{10} an in Stunden gemessene Zeitspanne bis zum Abgeben als stetige Zufallsvariable X mit $\Omega_X=[0;1]$ gemäß der Dichtefunktion φ mit $\boxed{\varphi(x) = 6x^2\cdot(1-x^3)}$ verteilt ist [wie mittlerweile jahr(zehnt)elange empirische Untersuchungen bei diesem speziellen Typ von Schularbeit nahegelegt haben].

a) "Kontrolle ist besser als Vertrauen!", in diesem Sinn: Überprüfe, dass φ tatsächlich Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariable X mit $\Omega_X=[0;1]$ ist und skizziere den Graphen ("Kurvendiskussion light"!).

b) Berechne $\mu:=E(X)$ und ermittle sodann jenen Zeitpunkt, zu dem die durchschnittliche Arbeitszeit erreicht werden sollte.

c) Wie viele der 102 Schüler sollten gemäß des zu überprüfenden stochastischen Modells die durchschnittliche Arbeitszeit überschreiten?

d) Berechne die Varianz von X und nimm zur Güte der Approximation $\sigma(X) \approx \frac{23}{120}$ Stellung.

e) Berechne $P(|X-\mu|<\sigma)$, wobei die Näherung aus d) zu verwenden ist.
Wie viele von 77 Schülern, welche in einer in der Nähe gelegenen Schule eine Schularbeit vom gleichen Typ schreiben, sollten daher gemäß des vorliegenden stochastischen Modells eine Arbeitszeit aufweisen, die gerade in diesem Bereich liegt?

f) Berechne den Median von X und ermittle auch den entsprechenden Zeitpunkt. Was sollte zu diesem Zeitpunkt passiert sein?

Als krönenden Abschluss auf der letzten Seite ein englischsprachiges, klassenübergreifendes, familiäres Beispiel! ☺

18) Ms. Vorstandlechner and her brother Mike can be happy, because their parents make them a special present, which consists of two things: A new car and responsibility [because they have to use it together!(?☺/L?)], which includes driving their younger sister Tamara. For Ms. Vorstandlechner (as a passionate young mathematician) it is important to know mathematical details about the average life expectancy of their car, so she calls the mathematical director of the car company, which leads her to the following information: The life expectancy of their car as a continous random variable (unit: years!) X with the event space Ω=[0;15] is distributed by the function φ with equation $\varphi(x) = \frac{20}{t^3} \cdot x^3 \cdot (b - x)$.

a) Derive b, when Ms. Vorstandlechner got to know that the expectation value of X equals ten years.

b) Imagine, that 242 more parents bought their children the same car. How many of these 243 cars will (based on the given stochastic model) "live" longer than five years?

Gutes Gelingen beim Lösen dieser schönen Aufgaben!

Wien, im Dezember 2009.

Dr. Robert Resel, e. h.