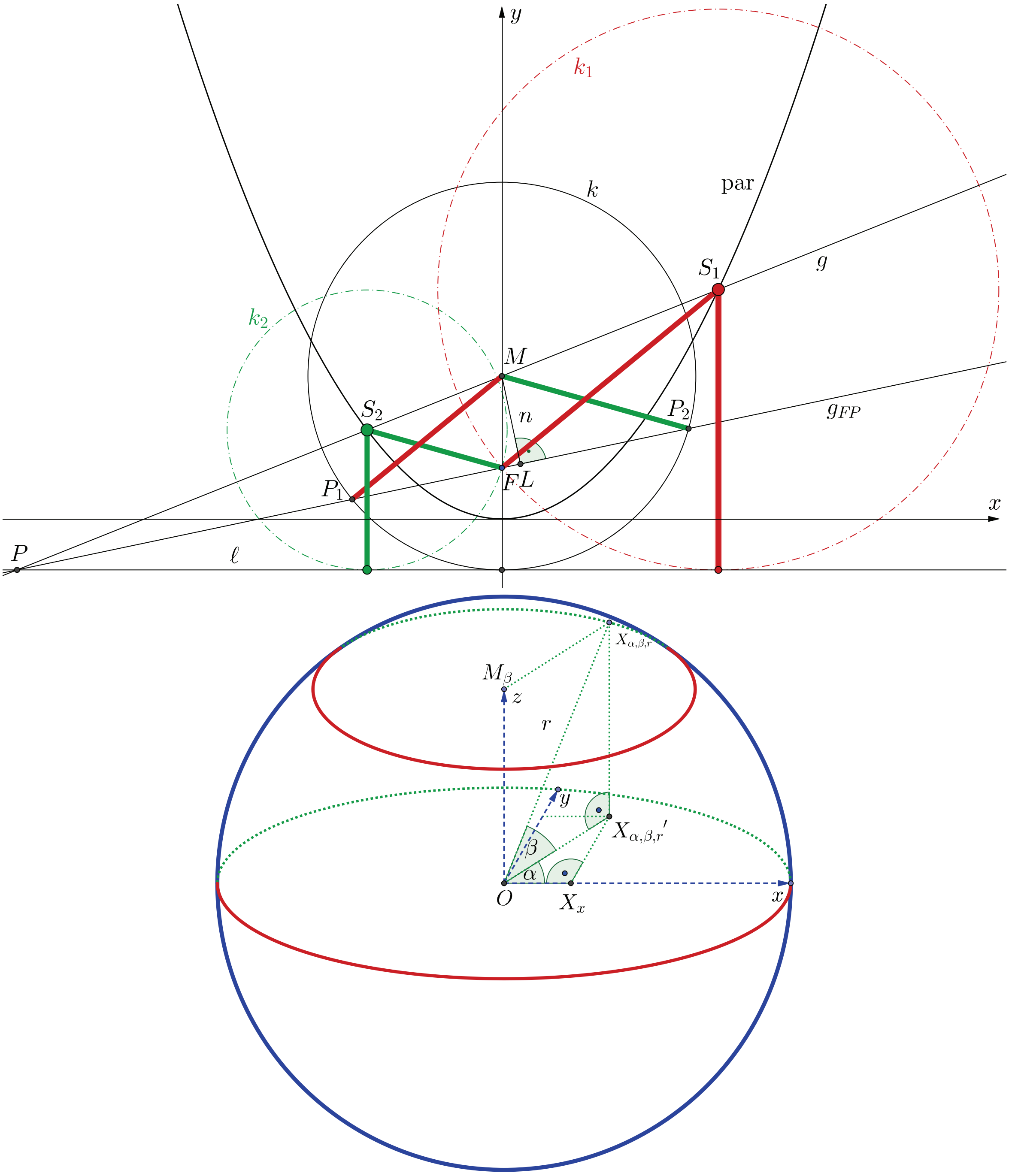
Robert Resel

Von der Addition bis zur z-Koordinate



Logos Verlag, 2017

In diesem von einem Mathe-Aficionado für Mathematikgourmets verfassten Buch entführt der Autor auf eine spannende Reise, die neben Streifzügen durch die Stochastik (der χ^2-Verteilung), die Regressionsanalyse sowie die Zahlentheorie (wo einem verblüffenden Zusammenhang zwischen (Stamm-)Brüchen und geometrischen Reihen sowie der Periodenlängenbestimmung von Stammbrüchen ohne Ausführung der Division nachgegangen wird) vorrangig Exquisites aus den Themen *Algebra*, *Analysis* & **Geometrie** behandelt.

Dies umfasst unter anderem eine Analyse von Rotationen in höheren Dimensionen (was auf die $SO(n)$ führt, für die im Fall $n = 3$ auch eine besondere Untergruppe betrachtet wird), verblüffende Lösungswege für vor allem quadratische, aber auch kubische Gleichungen, ein äußerst ungewöhnliches Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$, ferner eine merkwürdige Begegnung mit <u>dem</u> vektoriellen Produkt des $\mathbb{R}^3$ sowie in vielfacher Weise die Gewinnung von geschlossenen Formeln für Potenzsummen und last but not least pythagoreische Tripel.

Dort zieht uns zum einen die Eulersche Zahl in Form vielfältiger Manifestationen in ihren Bann, was von neuen Darstellungen selbiger über die Normalverteilung bis hin zu komplexen Elementen reicht. Zudem werden faszinierende Eigenschaften der harmonischen Funktionen detailliert analysiert, höhere Integrationsmethoden (samt den Hyperbelfunktionen sozusagen als Bonus) genetisch erschlossen, Kurven nach einem ungewöhnlichen Gesichtspunkt miteinander verglichen sowie Scharen von Kurven (darunter auch spezielle Typen von Polynomfunktionen vom Grad 2 bis 4) und harmonische Folgen untersucht.

Hier schließlich erleben Determinante und Skalarprodukt eine wahrhafte Renaissance, blüht die Dreiecksgeometrie (auch in Kombination mit Kegelschnitten) regelrecht auf, zeigt sich die technische Mathematik via Otto Mohr von einer verblüffenden Seite, führt eine neue Sichtweise der Hesseschen Abstandsformel geradewegs in die Regressionsanalyse, verzaubern uns ganz unerwartet trigonometrische Summensätze, sehen wir uns (scheinbar) völlig aus heiterem Himmel mit berühmten Reihen in der projektiven Geometrie sowie in Beweisfiguren des Lehrsatzes von Pythagoras (der auf siebenfache Weise neu bewiesen wird) konfrontiert, unternehmen wir Exkurse in die Elementargeometrie sowie die algebraische Geometrie und landen dann auch noch in äußerst ausschweifender Form bei den Kegelschnitten und schließlich bei der Hundekurve sowie der Pseudosphäre.

Im großen Garten der Geometrie kann sich jeder
nach seinem Geschmack einen Strauß pflücken.
David Hilbert

1 Einleitung

Zutreffender als dieser legendäre deutsche Mathematiker kann man es kaum beschreiben, da die Geometrie wahrhaftig derart viele Überraschungen bereithält, dass kein dem Denken zugetaner Mensch leugnen kann, dass sich unter diesen Perlen ein (oder gar mehrere) Exemplar(e) befindet (befinden), welche(s) einen Akt des individuellen Staunens evoziert (evozieren). Freilich wird je nach Geschmack die eine geometrische Landschaft für ein wenig mehr, die andere womöglich für eine Spur weniger Verblüffung sorgen, jedenfalls aber stellen sie allesamt einen wertvollen Erkenntnisgewinn dar, was wir nun in diesem Einleitungskapitel auf die konkreten Inhalte (egal ob direkt oder indirekt geometrischen Charakters) des vorliegenden Buchs bezogen exemplifizieren werden, wobei wir (bedingt durch das Zitat des großen Hilbert) mit dem Geometrieteil - welcher dem sechsten und letzten Kapitel entspricht - beginnen, der fast 50% des gesamten Buchs abdeckt.

- Wiewohl auch dieser vierte Band als Fortsetzung der Bände 1 (”*Reise zum Mittelpunkt der Mathematik*”, im Folgenden stets auf das Literaturverzeichnis bezogen via [48] angeführt), 2 (”*In 101 Abschnitten um die mathematische Welt*”, in weiterer Folge gemäß Literaturverzeichnis mit [49] abgekürzt) und 3 (”*20000 Kurven unter der Enveloppe*”, fortan ebenso im Einklang mit dem Literaturverzeichnis via [50] etikettiert) letztere im Allgemeinen inhaltlich nicht voraussetzt (ergo im Wesentlichen unabhängig von [48], [49] und [50] durchgearbeitet werden kann), werden nichtsdestotrotz an so mancher Stelle innermathematische Querbezüge mit Hilfe der ersten drei Bände hergestellt, die dem werten L$\substack{\text{e}\\ \text{ö}}$ser (wie der Autor dieser Zeilen sein Publikum gemäß seiner Philosophie, dass Mathematik kein Zuschauersport ist, schon in den ersten drei Bänden anzusprechen pflegte und diese Tradition auch im vorliegenden Band fortführt) Guster auf (noch) mehr interessante mathematische Schauplätze bzw. komplementäre Sichtweisen machen sollen, was schon einmal in ganz besonderer Weise auf Abschnitt 6.1 (und 6.2) zutrifft. Ebenda wird nämlich das - wie man den entsprechend detaillierten Ausführungen a.a.O. entnehmen kann - bereits in den Vorgängerbänden (aber auch in Abschnitt 6.5) mehr oder minder akribisch analysierte skalare Produkt (sowie die Determinante) von (geordneten) Vektorpaaren des $\mathbb{R}^2$ auf eine neue Basis gestellt, und dies unter Berücksichtigung einer Vielzahl möglicher Fälle (was Material für Schüler- oder Studenteneigentätigkeit bietet), woran unter Bezugnahme auf einen Abschnitt des Analysis-Kapitels (Kapitel 2) die Beschäftigung mit überbestimmten linearen Gleichungssystemen in Abschnitt 6.3 anschließt (wobei die Bezugnahme in bilateraler Weise zu verstehen ist, wie anhand des ersten Abschnitts des Analysis-Kapitels deutlich wird). Auch das faszinierende Gebiet der Dreiecksgeometrie darf in diesem Band nicht fehlen und überschneidet sich im Zuge von Abschnitt 6.4 auch schon ein wenig mit dem in Kürze beschriebenen Kegelschnittsabschnitt 6.15, was in ähnlicher Weise auch auf den sich mit ausgewählten Schmankerln der technischen Mathematik beschäftigenden Abschnitt 6.6 zutrifft, wobei uns die Dreiecksgeometrie auch im (in den trigono)metrisch akzentuierten Abschnitt(en 6.10, 6.11 und) 6.9 (in)direkt mit ihrem Antlitz erfreut. Abschnitt 6.7 behandelt nicht nur die HESSEsche Abstandsformel von einem neuen Standpunkt aus, sondern legt damit auch den Grundstein für den ersten Abschnitt (3.1) des Stochastik-Kapitels, wohingegen Abschnitt 6.8 eine kurze didaktisch-methodische Analyse zur Elementargeometrie des Trapezes zum Inhalt hat. Die Abschnitte 6.12 und 6.13 über (elementare) projektive und algebraische Geometrie stellen eine interessante Vernetzung mit der Analysis her, wohingegen Abschnitt 6.14 mit seinen sieben neuen Beweisen des Lehrsatzes von PYTHAGORAS in weiten Teilen bewusst elementar gehalten wurde, wozu es jedoch mit dem Abschnitt 6.16 noch ein reizvolles Nachspiel gibt, wenn wir Kurven untersuchen, welche aus ganz bestimmten Anordnungen in entsprechenden Beweisfiguren hervorgehen. Nach einer (weiteren) überraschenden Manifestation des harmonischen Mittels in der Geometrie (inkl. einem Wink in Richtung fraktaler Geometrie) bildet das zu etwas mehr als einem Drittel den *Kegelschnitten* gewidmete (Gleich wird auch noch *darauf* eingegangen!) Geometriekapitel mit drei besonderen Hüllkurven - unter ihnen insbesondere die faszinierende Traktrix (inkl. der durch sie generierten Pseudosphäre) - seinen Abschluss.

Bevor wir im Rahmen dieses Einleitungskapitels noch auf die Kapitel 2 bis 5 (über Analysis, Stochastik, Zahlentheorie und Algebra) näher eingehen, folgt nun noch ein kurzer Abriss über den Kegelschnittsabschnitt, welcher nebst Scharen von Parabeln und Ellipsen auch (affin betrachtet) unterschiedliche Kegelschnittstypen zueinander in Beziehung setzt (was auf äußerst überraschende Sätze führt), ferner differentialgeometrische (teilweise von eher propädeutischem oder heuristischem Charakter und dadurch umso reizvoller) Überlegungen miteinbezieht, überdies Querverbindungen zur Dreiecksgeometrie (wie schon bei 6.4 angemerkt) herstellt und schließlich auch noch (nicht nur Scheitel-)Krümmungskreis(konstruktion)e(n) inkl. der Manifestation harmonischer Punktequadrupel behandelt. Ergänzend sei auch noch auf ein (nach [48]) erneutes Auftauchen *entarteter Kegelschnitte* und (*damit* fast automatisch einhergehend) Kegelschnitte in allgemeiner Lage, ferner (propädeutischer) projektiver Elemente (beim Übergang von der Ellipse zur Parabel) sowie schließlich delikater ausgewählter Eigenschaften der Parabel hingewiesen.

- Das zwischen einem Fünftel und einem Viertel des Buchs umfassende Analysis-Kapitel (Kapitel 2) stellt gleich ganz zu Beginn eine Querverbindung zum Geometriekapitel her, und zwar im Rahmen der überbestimmten linearen Gleichungssysteme, wobei die dadurch entstehende (Quasi-)Synergie schon ihren ganz eigenen speziellen Reiz hat. Ein gutes Viertel von Kapitel 2 nehmen die eo ipso interessanten harmonischen Funktionen (wobei wir uns auf zwei Variable beschränken) ein, die sehr intensiv bearbeitet werden, was insbesondere für die Herleitung ihrer Mittelwerteigenschaften mit **rein reellen Methoden** gilt, aber ebenso (wenn auch nicht im selben Ausmaß) auf diverse Untersuchungen ihrer geometrischen Eigenschaften (Produkte und Quotienten harmonischer Funktionen und die an sie - Faktoren bzw. Dividenden und Divisoren - geknüpften Bedingungen, damit auch Produkt bzw. Quotient wieder harmonisch sind, konjugiert harmonische Funktionenpaare sowie deren Niveaulinien-Orthogonalität, harmonische Polynomfunktionen zweiten Grades inkl. ihrer jeweils Konjugierten samt Nachweis, dass die entsprechenden Niveaulinien sozusagen konzentrische rechtwinklige Hyperbeln sind) zutrifft. Auch dem

Werk des legendären schweizer Mathematikers Leonhard Euler (1707-1783) wird wieder gebührend Rechnung getragen, indem die Abschnitte 2.3 sowie 2.4 und 2.7 mit alternativen gegen die Eulersche Zahl e konvergierenden Reihen sowie überraschenden Anwendungen der Eulerschen Formel $\boxed{e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x}$ (welche ja bereits in allen drei Vorgängerbänden immer wieder Thema war) in Form der Berechnung eines bestimmten uneigentlichen Integrals und der Ermittlung spezieller unbestimmter Integrale darlegen, welch enormes Potential Eulers Erbe auch über 230 Jahre (oder für die Aficionados: über $\ln(10^{100})$ Jahre bzw. zum Zeitpunkt des Verfassens dieser Zeilen eigentlich bereits ca. $\ln(10^{101})$ Jahre - passend zum Titel von [49]!) nach seinem Tod nach wie vor in sich birgt. Obgleich (wie eingangs dieses Absatzes bereits bemerkt) funktionentheoretische Methoden im Zuge der Mittelwerteigenschaften harmonischer Funktionen nicht zum Einsatz kommen, wird jedoch das obige Integral nach einer (bis auf die Verwendung der $\boxed{\text{Eulerschen Formel}}$) rein reellen Berechnung in Abschnitt 2.4 im darauffolgenden Abschnitt 2.5 mit Methoden der komplexen Analysis (speziell dem Residuensatz) berechnet, was dem werten L$\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{e}}{\text{ö}}$ser auf sehr schöne Weise eine vergleichende Betrachtung (und individuelle Bewertung) unterschiedlicher Methoden ermöglicht. Auch die klassischen nicht-trivialen Integrale $\int\limits_0^\infty e^{-x^2} \cdot \mathrm{d}x$ und $\int\limits_0^1 e^{-x^2/2} \cdot \mathrm{d}x$ werden in den Abschnitten 2.6 und 2.9 in ungewöhnlicher Weise jeweils Gegenstand unserer Überlegungen sein. Weiters widmen wir uns der (aus der Sicht der Schulmathematik) gehobeneren Integrationstechniken der "partiellen Integration" sowie der "Substitution", und zwar jeweils von einem genetischen Standpunkt aus, indem wir darlegen, wie sich diese Techniken aus speziellen Situationen heraus durch Abstraktion der entscheidenden dahintersteckenden Grundideen ergeben, was im Fall der Substitutionsregel überdies noch zu einem ebenso genetischen (aber dem in [50] gewählten deutlich verschiedenen) Zugang zu den Hyperbelfunktionen führen wird. In den noch nicht angerissenen sechs verbleibenden Abschnitten des Analysis-Kapitels beschäftigen wir uns im Rahmen einer ersten Konfrontation (ohne Differentialrechnung!) mit dem Newtonschen Näherungsverfahren am Spezialfall von Polynomfunktionen zweiten Grades, behandeln hernach harmonische Folgen als Kontrast zu den allseits bekannten arithmetischen und geometrischen Folgen, unternehmen zwei interessante Exkursionen in das weite Reich der Polynomfunktionen, wobei wir nach dem eben erst erwähnten Grad 2 zu den Graden 3 bzw. 4 aufsteigen, indem wir eine interessante Partition eines krummlinig begrenzten Gebiets (unter maßgeblicher Beteiligung des Graphen einer Polynomfunktion dritten Grades) bzw. eine wahrhaft ästhetische Darstellungsformel für Wendestellen behandeln, woran sich dann noch propädeutische differentialgeometrische Untersuchungen ausgewählter Kurvenscharen sowie ungewöhnliche Vergleiche zwischen bestimmten algebraischen Kurven dritten, vierten und sechsten Grades anschließen. Im Zusammenhang mit diesem Vergleich von Newton-Knoten, Lissajous-Schleifen sowie der *Astroide* kommt auch die berühmte isoperimetrische Ungleichung samt ihrer $\boxed{\text{höherdimensionalen Analoga}}$ kurz zur Sprache, was im Rahmen ihrer $\boxed{\text{"}\mathbb{R}^n\text{-Version"}}$ automatisch wieder eine Querverbindung zu Band 2 evoziert, da wir uns ja ebenda u.a. ausführlich(st!) mit dem Volumen der Sphäre im $\mathbb{R}^n$ auseinandergesetzt haben, was dann eben vor allem für L$\overset{\text{e}}{\text{ö}}$ser, welche sich für die isoperimetrische Ungleichung unabhängig von der zugrundeliegenden Dimension interessieren, eine ideale Gelegenheit des vertieften Studiums bietet.

- Das mit etwas mehr als einem Zwölftel des gesamten Buchs zweitkürzeste Kapitel ist jenes über Stochastik, das sich ausschließlich mit der Regressionsanalyse (inkl. einer **neuen auf den Autor der vorliegenden Zeilen zurückgehenden Alternative zur klassischen Trendgerade**) sowie der χ^2-Verteilung beschäftigt, wobei bezüglich letzterer exklusiv die dahintersteckende Analysis Gegenstand unserer äußerst tiefliegenden (bis zu Darstellungssätzen der Momente erster und zweiter Ordnung dieser besonderen Verteilung sowie einem Grenzwertsatz reichenden) Überlegungen sein wird, was auch die Rückführung der entsprechenden Verteilungsfunktion im anspruchsvolle(re)n Fall ungerader Freiheitsgrade auf jene der Standardnormalverteilung (mit radiziertem Argument) inkludiert und überdies erneut zu einer äußerst fruchtbaren Querverbindung zu Band 2 führt, und zwar sowohl die *Gammafunktion* als auch die *Normalverteilung* betreffend. Dass die aus den gewonnenen Resultaten folgenden Konsequenzen auch für die anwendungsorientierte testtheoretische Seite der χ^2-Verteilung von enormer Relevanz sind, steht außer Frage, wird aber in diesem Buch nicht weiter verfolgt, sondern auf [53] verwiesen.

- Im kürzesten aller Kapitel, welches sich auf gerade einmal vier Seiten der elementaren Zahlentheorie widmet, wird zum einen der interessanten Frage nachgegangen, wie man die Periodenlänge eines Stammbruchs bestimmen kann, ohne die komplette Division ausführen zu müssen und zum anderen zunächst allgemein überlegt und dann anhand des Stammbruchs $\frac{1}{49}$ exemplifiziert, wie sich im Fall der tatsächlichen Division der bekannte Divisionsalgorithmus durch Anwendung der Summenformel für unendliche konvergente geometrische Reihen umgehen lässt.

- Im knapp 20% des Buchs einnehmenden Algebra-Kapitel werden neben dem harmonischen Mittel (in gegenseitiger Wechselwirkung mit den beiden anderen (gar noch) bekannte(re)n Mitteln, nämlich dem arithmetischen und dem geometrischen, auch in reizvollen Mischformen) besonders ausführlich im Rahmen von ziemlich genau einem Drittel dieses Kapitels die speziellen orthogonalen Gruppen des $\mathbb{R}^3$ und des $\mathbb{R}^4$ konstruiert, wobei zuvor angestellte Überlegungen über Rotationen im ”allgemeinen” $\mathbb{R}^n$ den kognitiven Nährboden für die konkreten Argumentationen in den Fällen $n = 3$ (der auch bereits in den Bänden 1 und 3 mit bzw. ohne Verwendung des Schiefkörpers $\mathbb{H}$ der Hamiltonschen Quaternionen behandelt wurde) und $n = 4$ bereitstellen und überdies noch ein weiterer Abschnitt der $SO(3)$ gewidmet ist, in dem eine (auch geometrisch) reizvolle Untergruppe letzterer untersucht wird. Die im Rahmen der ersten drei Bände geführten sage und schreibe 23(!) Beweise für die kleine Lösungsformel zum Auflösen normierter quadratischer Gleichungen werden in fünf der 23 Algebra-Abschnitte dieses Bands durch weitere Beweise ergänzt, was (wie sich in Abschnitt 5.19 im Detail zeigen wird) zwar nicht (nach Adam Ries) auf 28, aber immerhin 27 Beweise in der Gesamtheit der vier Bände führt, wobei auch hier wieder unterschiedlich(st!)e teils durchaus *überraschende Ideen* verwendet werden. *Dies* trifft einen Grad höher für kubische Gleichungen auch in besonderer Weise auf einen (nebst Band 1) ungewöhnlichen (genetischen) Zugang zur Cardano-Formel zu. Vektorprodukte des $\mathbb{R}^3$ tauchen in reichlich eigenartiger Weise in zwei Abschnitten des Algebra-Kapitels auf. Dabei handelt es sich in Abschnitt 5.7 **nicht** um das vektorielle Produkt (im Gegensatz zu Abschnitt 5.12, wo das vektorielle Produkt sozusagen für eine spezielle lineare Abbildung φ des $\mathbb{R}^3$ in sich Pate steht und uns eben gerade φ zu interessanten Einsichten über die Standardskalarprodukte im $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ verhilft), sondern um einen Versuch - Der Connaisseur wird wissen, wie dies ausgehen wird müssen! -, die Multiplikation von Zahlenpaaren in Polarkoordinaten (i.e. das Multiplizieren komplexer Zahlen) auf Zahlentripel in Kugelkoordinaten zu übertragen, um so den Vektorraum $(\mathbb{R}, +)$ durch diese Multiplikation zu einem Körper zu erweitern. Zuguterletzt verbleiben im Algebrakapitel noch neun Abschnitte, von denen acht diversen Potenzsummenformeln gewidmet sind (welche auch schon in den Bänden 1 und 3 untersucht wurden), die hier auf derart unterschiedliche Arten hergeleitet werden, dass alleine das dahinterliegende Spektrum an (teils sehr ungewöhnlichen) Ideen es schon wert ist, diese Abschnitte durchzuarbeiten, und schließlich der letzte Abschnitt 5.23 eine alternative Parametrisierung pythagoreischer Tripel behandelt, über den nun noch (wie auch über die Abschnitte 2.15 über ungewöhnliche Vergleiche algebraischer Kurven von höherer Ordnung als 2 und 5.18 über Quadratsummen) eine kurze Bemerkung anzubringen ist:

Die drei genannten Abschnitte basieren sozusagen auf der methodisch-didaktischen Grundlagenforschung des Autors der vorliegenden Zeilen im Zuge der Unterrichtsvorbereitung für die zwölfte (Abschnitt 2.15) bzw. siebente (Abschnitt 5.23) Schulstufe in österreichischen Gymnasien resp. der österreichischen Mathematikolympiade im Fall von Abschnitt 5.18, was das m.E. erstaunliche Phänomen zutage fördert, wie stoffdidaktische Arbeiten über den Zugang zur Mathematikdidaktik (die Berufswissenschaft der Mathematiklehrer) als Ingenieurswissenschaft (Bezüglich dieser Auffassung von Mathematikdidaktik vgl. man [9]!) auch entstehen können.

An dieser Stelle bleibt mir die angenehme Gelegenheit, mich bei meinem geschätzten Kollegen Herrn Mag. Oswald Redl nicht nur für seinen Hinweis auf den Artikel [22] sowie das Werk [61] (welches für einen "Grassmaniac" wie ihn geradezu eine Pflichtlektüre darstellt), sondern auch für seine fundierten Ratschläge im Umgang mit LaTeX herzlich zu bedanken. Last but not least möchte ich Herrn OStR. i.R. Mag. Herbert Paukert, meinem verehrten Psychologielehrer aus meiner Zeit als Schüler am Gymnasium, meinen verbindlichsten Dank ausdrücken. Denn er - seines Zeichens auch Mathematiker und Informatiker sowie Schulbuchautor, u.a. von [38] - war es, der mich (und meine Schulkollegen) vor über 20 Jahren erstmals mit dem Konzept der Regressionsanalyse vertraut machte (konfrontierte), was mir nicht nur für die Universität eine enorme Hilfe war, sondern sich in meiner Kreativität als Autor eben auch in den Abschnitten 3.1 bis 3.3 sowie 6.7 offensichtlich niedergeschlagen hat.

Dem werten L$\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{e}}{\text{ö}}$ser wünsche ich mit besten mathematischen Grüßen, dass er sich durch meine Bemühungen ebenso mitreißen lässt, wie dies Prof. Paukert mit der (immer wieder auch mathematisch akzentuierten) Psychologie in meinen Jugendjahren gelungen ist.

Wien, im Jänner 2017. Robert Resel

Literatur

[1] Achleitner, Renate et al. (2007): Ganz klar: Mathematik 3. Jugend & Volk, Wien.

[2] Aigner, Martin und Günter M. Ziegler (1998): Proofs from THE BOOK. Springer, Berlin.

[3] Alsina, Claudi und Roger B. Nelson (2013): Bezaubernde Beweise. Eine Reise durch die Eleganz der Mathematik. Springer, Berlin.

[4] Arens, Tilo, Frank Hettlich, Christian Karpfinger, Ulrich Kockelhorn, Klaus Lichtenegger und Hellmuth Stachel (2008): Mathematik. Spektrum, Heidelberg.

[5] Arndt, Jörg und Christoph Haenel (1998^2): π. Algorithmen, Computer, Arithmetik. Springer, Berlin.

[6] Baptist, Peter (1998): Pythagoras und kein Ende? Klett, Stuttgart.

[7] Berg, Lothar (1972): Operatorenrechnung I: Algebraische Methoden. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.

[8] Berg, Lothar (1974): Operatorenrechnung II: Funktionentheoretische Methoden. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.

[9] Blankenagel, Jürgen und Wolfgang Spiegel (Hrsg.) (2000): Mathematikdidaktik aus Begeisterung für die Mathematik. Festschrift für Harald Scheid. Klett, Stuttgart.

[10] Boxhofer, Emmerich et al. (2014): mathematiX 3. Veritas, Wien.

[11] Boyce, William E. und Richard C. Di Prima (1995): Gewöhnliche Differentialgleichungen. Spektrum, Heidelberg.

[12] Bürger, Heinrich, Roland Fischer, Günther Malle, Manfred Kronfellner, Thomas Mühlgassner und Franz Schlöglhofer (1993^2): Mathematik Oberstufe 4. öbv&hpt, Wien.

[13] Cigler, Johann (1976): Einführung in die Lineare Algebra und Geometrie, 1. Teil. Manz, Wien.

[14] Cigler, Johann (1986^2): Einführung in die Differential- und Integralrechnung, 1. Teil. Manz, Wien.

[15] Courant, Richard (1972^4): Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung 2. Springer, Berlin.

[16] Ebbinghaus, Heinz-Dieter et al. (1992^3): Zahlen. Springer, Berlin.

[17] Elstrodt, Jürgen (1996): Maß- und Integrationstheorie. Springer, Berlin.

[18] Erber, Gabriele et al. (2001): Zum Beispiel Mathematik 3. Veritas, Wien.

[19] Felzmann, Reinhold, Walter Weidinger und Manfred Blümel (1988): Geometrisches Zeichnen (3. Klasse). öbv&hpt, Wien.

[20] Foata, Dominique und Aimé Fuchs (1999): Wahrscheinlichkeitsrechnung. Birkhäuser, Basel.

[21] Freitag, Eberhard und Rolf Busam (2000^3): Funktionentheorie 1. Springer, Berlin.

[22] Friedmann, Tamar und C. R. Hagen (2015): Quantum mechanical derivation of the Wallis formula for π. In: Journal of Mathematical Physics 56, 112101.

[23] Glaeser, Georg und Konrad Polthier (2009): Bilder der Mathematik. Spektrum, Heidelberg.

[24] Hanisch, Günter (1991): Die χ^2-Verteilung. In: ÖMG Didaktik-Reihe (19), S. 79-95.

[25] Hellus, Michael (2013^3): Lineare Algebra nicht-vertieft. Logos, Berlin.

[26] Hesse, Christian (2003): Angewandte Wahrscheinlichkeitstheorie. Vieweg, Braunschweig.

[27] Hilbert, David und Stephan Cohn-Vossen (1996^2): Anschauliche Geometrie. Springer, Berlin.

[28] Hohenberg, Fritz (1956): Konstruktive Geometrie für Techniker. Springer, Wien.

[29] Kehlmann, Daniel (2005): Die Vermessung der Welt. Rowohlt, Reinbek.

[30] Knopp, Konrad (1996^6): Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. Springer, Berlin.

[31] Knörrer, Horst (1996): Geometrie. Vieweg, Braunschweig.

[32] Kowol, Gerhard (2009): Projektive Geometrie und Cayley-Klein Geometrien der Ebene. Birkhäuser, Boston.

[33] Köhler, Günter (2006): Analysis. Heldermann, Lemgo.

[34] Krickeberg, Klaus und Herbert Ziezold (1995^4): Stochastische Methoden. Springer, Berlin.

[35] Maier, Ramona (2004): Die isoperimetrische Ungleichung auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Diplomarbeit, Universität Tübingen.

[36] Meyberg, Kurt und Peter Vachenauer (1995^3): Höhere Mathematik 1. Springer, Berlin.

[37] Needham, Tristan (2001): Anschauliche Funktionentheorie. Oldenbourg, München.

[38] Paukert, Herbert (1998): Ein Fenster zum ICH. öbv&hpt, Wien.

[39] Pressley, Andrew (2001): Elementary differential geometry. Springer, London/Berlin.

[40] Reichel, Hans-Christian, Robert Müller, Günter Hanisch und Josef Laub (1992^2): Lehrbuch der Mathematik 7. öbv&hpt, Wien.

[41] Reichel, Hans-Christian, Robert Müller und Günter Hanisch (1993^2): Lehrbuch der Mathematik 8. öbv&hpt, Wien.

[42] Reichel, Hans-Christian, Erich Windischbacher, Robert Resel, Volkmar Lautscham und Stefan Götz (1997): Wege zur Mathematik - Anregungen und Vertiefungen. öbv&hpt, Wien.

[43] Resel, Robert (1995): Reihenentwicklungen - Potenzreihen. Fachbereichsarbeit, Wien.

[44] Resel, Robert (1999): Ausbaumöglichkeiten der Oberstufen-Schulmathematik. Diplomarbeit, Universität Wien.

[45] Resel, Robert (2000^2): Vollständige Lösungen zum Kapitel Wiederholung, Vertiefung und Ergänzung des Lehrbuchs der Mathematik 8 von Reichel-Müller-Hanisch. öbv&hpt, Wien.

[46] Resel, Robert (2001): Didaktisch-methodische Überlegungen zu ausgewählten Kapiteln des Geometrieunterrichts der AHS-Oberstufe. Dissertation, Universität Wien.

[47] Resel, Robert (2005): Spezielle Beobachtungen zur Geometrie des Oktaeders. In: ÖMG Didaktik-Reihe (38), S. 118-129.

[48] Resel, Robert (2014): Reise zum Mittelpunkt der Mathematik. Logos, Berlin.

[49] Resel, Robert (2014): In 101 Abschnitten um die mathematische Welt. Logos, Berlin.

[50] Resel, Robert (2015): 20000 Kurven unter der Enveloppe. Logos, Berlin.

[51] Richter-Gebert, Jürgen und Thorsten Orendt (2009): Geometriekalküle. Springer, New York/Berlin/Heidelberg.

[52] Rudin, Walter (1999): Reelle und komplexe Analysis. Oldenbourg, München/Wien.

[53] Scheid, Harald (1992): Wahrscheinlichkeitsrechnung. BI-Verlag, Mannheim.

[54] Scheid, Harald (1997): Folgen und Funktionen. Spektrum, Heidelberg.

[55] Scriba, Christoph J. und Peter Schreiber (2001): 5000 Jahre Geometrie. Springer, Berlin.

[56] Toenniessen, Fridtjof (2010): Das Geheimnis der transzendenten Zahlen. Spektrum, Heidelberg.

[57] Van der Waerden, B.L. (1993^9): Algebra I. Springer, Berlin.

[58] Wassell, Stephen R. (2002): Rediscovering a Family of Means. In: The Mathematical Intelligencer, Volume 24, Number 2 (S.58-65). Springer, New York.

[59] Werner, Dirk (1995): Funktionalanalysis. Springer, Berlin.

[60] Wischounig, Veronika (2000): Analytische Darstellung ebener algebraischer Kurven. Diplomarbeit an der Technischen Universität Wien.

[61] Zaddach, Arno (1994): Graßmanns Algebra in der Geometrie mit Seitenblicken auf verwandte Strukturen. BI-Verlag, Mannheim.