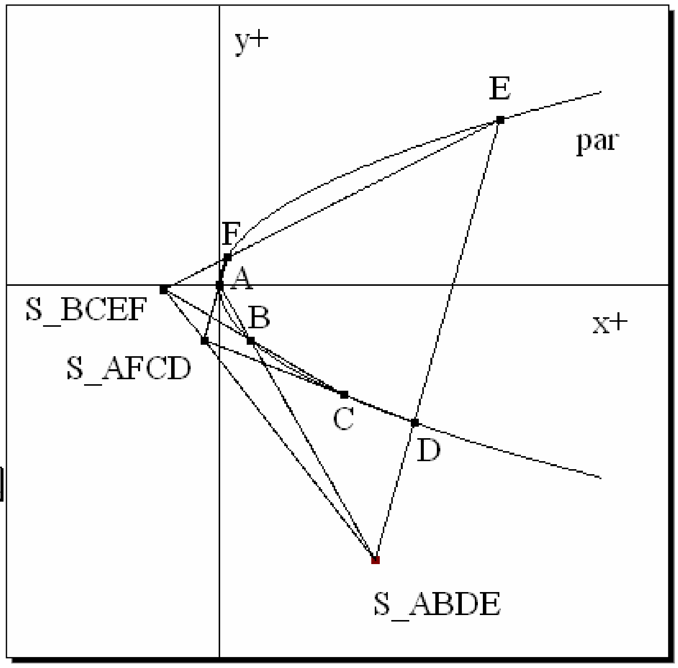
Aufgabe 1 zur Parabel: AHS Heustadelgasse BG-BRG-BORG Klasse: 7B(G)
(WS 2007/08) Lehrer: Dr. Resel
Fach: Mathematik



Die Punkte A(0|0), B(12|–24), C(x_C|–48), D(x_D|–60), E(x_E|–72) und F(x_F|12) liegen auf einer Parabel in erster Hauptlage. Verifiziere anhand dieses Sechsecks den Satz von PASCAL!

Lösung (vgl. nebenstehende Abbildung!):

Ansatz: par.: $y^2 = 2px$

B∈ par → $576 = 24p$ → $p = 24$ → $\boxed{\text{par.: } y^2 = 48x}$

C∈ par → $2304 = 48x_C$ → $x_C = 48$ → $\boxed{C(48|-48)}$

D∈ par → $3600 = 48x_D$ → $x_D = 75$ → $\boxed{D(75|-60)}$

E∈ par → $5184 = 48x_E$ → $x_E = 108$ → $\boxed{E(108|72)}$

F∈ par → $144 = 48x_F$ → $x_F = 3$ → $\boxed{F(3|12)}$

A(0|0), sic !

Z.Z. : Die drei Punkte $\{S_{ABDE}\} = g_{AB} \cap g_{DE}$, $\{S_{BCEF}\} = g_{BC} \cap g_{EF}$ und $\{S_{CDAF}\} = g_{CD} \cap g_{AF}$ liegen kollinear.

g_{AB}: $$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 12 \\ -24 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \to g_{AB}: 2x + y = 0$$

g_{DE}: $$\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} 33 \\ 132 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \to g_{DE}: 4x - y = 0$$

Durch Lösen des aus der Schnittaufgabe $\{S_{ABDE}\} = g_{AB} \cap g_{DE}$ resultierenden Gleichungssystems erhält man $\boxed{S_{ABDE}(60|-120)}$.

g_{BC}: $$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 36 \\ -24 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \to g_{BC}: 2x + 3y = -48$$

g_{EF}: $$\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} -105 \\ -60 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix} \to g_{EF}: 4x - 7y = -72$$

Durch Lösen des aus der Schnittaufgabe $\{S_{BCEF}\} = g_{BC} \cap g_{EF}$ resultierenden Gleichungssystems erhält man $\boxed{S_{BCEF}\left(-\frac{276}{13}\middle|-\frac{24}{13}\right)}$.

g_{CD}: $$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 27 \\ -12 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix} \to g_{CD}: 4x + 9y = -240$$

g_{AF}: $$\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \to g_{AF}: 4x - y = 0$$

Durch Lösen des aus der Schnittaufgabe $\{S_{AFCD}\} = g_{AF} \cap g_{CD}$ resultierenden Gleichungssystems erhält man $\boxed{S_{AFCD}(-6|-24)}$.

Zum Nachweis der Kollinearität (vgl. Abbildung!) der Punkte S_{ABDE}, S_{BCEF} und S_{AFCD} stellen wir beispielsweise die beiden Vektoren

$\overrightarrow{S_{AFCD}S_{ABDE}} = \begin{pmatrix} 66 \\ -96 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 11 \\ -16 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{S_{BCEF}S_{AFCD}} = \begin{pmatrix} 198/13 \\ -288/13 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 198 \\ -288 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 11 \\ -16 \end{pmatrix}$ auf, woraus folgt, dass dies beiden Vektoren linear abhängig sind. Damit liegen die drei Punkte S_{ABDE}, S_{BCEF} und S_{CDAF} kollinear, was zu überprüfen war.