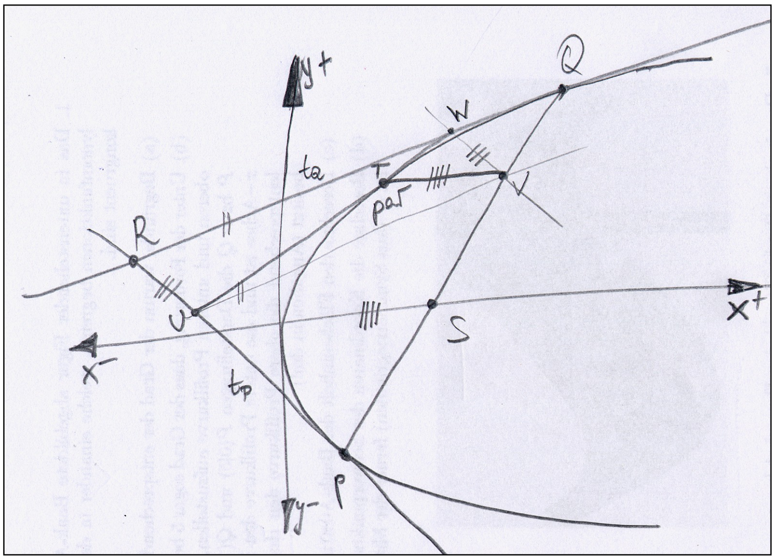
Aufgabe 13 zur Parabel: (WS 2007/08)

Klasse: 7B(G)
Lehrer: Dr. Resel
Fach: Mathematik



13) In nebenstehender Figur (eine gelungene Freihandskizze eines ehemaligen Schülers!) ist eine **<u>wahre Fülle von Lehrsätzen</u>** illustriert, welche du anhand jener Parabel in erster Hauptlage verifizieren sollst, welche F(12|0) als Brennpunkt besitzt, und zwar ausgehend vom Punkt R(–15|24) unter Anwendung des Begriffspaars "Pol/Polare":

SATZ 1. Ergänzt man zu einem beliebigen Punkt V auf g_{PQ} die Punkte R und V derart zu einem Parallelogramm RUVW, dass U auf t_P sowie W auf t_Q liegt, so ist g_{UW} auch eine Parabeltangente (Berührungspunkt T).

SATZ 2. Die Gerade g_{TV} verläuft parallel zur Parabelachse.

SATZ 3. Ist S der Schnittpunkt von g_{PQ} mit der Parabelachse, so liegt der Mittelpunkt der Strecke RS auf der Scheitelpunkttangente.

Lösung (vgl. obige Abbildung!):

Ansatz: par.: $y^2 = 2px$, $F(\frac{p}{2}|0)$
F(12|0) $\rightarrow$ par. : $y^2 = 48x$

r … Polare von R(–15|24) bezüglich par
$\rightarrow$ $r \cap par = \{P,Q\}$: r : 24y = 24(x–15) bzw. r : y = x – 15 bzw. r : x – y – 15 = 0
bzw. (Beachte par. : $y^2 = 48x$) r : 48x – 48y – 720 = 0

Nun $r \cap par$: $y^2 - 48y - 720 = 0$ $\rightarrow$ $y_{1,2} = 24 \pm \sqrt{576+720} = 24 \pm 36$
$\rightarrow$ $y_1 = -12$ $\rightarrow$ $x_1 = 3$
Einsetzen in r !
$\rightarrow$ $y_2 = 60$ $\rightarrow$ $x_1 = 75$

$\rightarrow$ P(3|–12), Q(75|60)

Zu Satz 1: $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 72 \\ 72 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ Jeder Punkt der Form (3+t|–12+t) kommt für V in Frage.

"Schöne" Ergebnisse erhält man für t∈ {12,24,36,48,60}, vgl. dazu den Hinweis bei den Lösungen zu ausgewählten Aufgaben auf der Seite nach den Aufgaben 23 bis 27!

Wählen wir nun hier etwa t=24, so erhalten wir zunächst V(27|12). ***<u>Nutze die übrigen Werte zum Üben!</u>***

Für t_P ergibt sich wegen $\overrightarrow{RP} = \begin{pmatrix} 18 \\ -36 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ die

Gleichung $\boxed{t_P: 2x+y = -6}$ (oder alternativ: P in die Spaltform einsetzen!).

Analog ergibt sich (Selbst!) für $\boxed{t_Q: 2x - 5y = -150}$.

W liegt nebst t_Q auch auf der $\boxed{\text{Parallelen } \wp_P}$ zu t_P durch V, für $\boxed{\text{welche}}$ die Gleichung $\boxed{\wp_P : 2x+y = 66}$ gilt,

ergo: $\{W\} = \wp_P \cap t_Q$ $\rightarrow$ W(15|36)
Selbst!

U liegt nebst t_P auch auf der $\boxed{\text{Parallelen } \wp_Q}$ zu t_Q durch V, für $\boxed{\text{welche}}$ die Gleichung $\boxed{\wp_Q : 2x-5y = -6}$ gilt,

ergo: $\{U\} = \wp_Q \cap t_P$ $\rightarrow$ U(–3|0)
Ebenso selbst!!

Nachweis, dass g_{UW} Tangente ist: $\overrightarrow{UW} = \begin{pmatrix} 18 \\ 36 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow g_{UW} : 2x - y = -6$

bzw. (Beachte par. : $y^2 = 48x$!) $g_{UW} : 48x - 24y = -144$, ergo $g_{UW} \cap$ par : $y^2 - 24y + 144 = 0$

bzw. $(y-12)^2 = 0$ → Doppellösung (ergo Tangente, wie behauptet) $y=12 \rightarrow x=3 \rightarrow T(3|12)$

Zu Satz 2: $y_T = y_V = 12$ → g_{TV} verläuft parallel zur x-Achse, welche gleichzeitig die Parabelachse ist, w.z.z.w.

Zu Satz 3: g_{PQ} ist die Polare r von R bezüglich par!

Nun gilt $r : y = x - 15$. Da S auf der Parabelachse (i.e. x-Achse!) liegt, gilt $S(x_S|0)$, was eingesetzt in r (Schließlich ist S ja der Schnittpunkt von g_{PQ}, ergo r, mit der Parabelachse, ergo der x-Achse!) $x_S = 15$, ergo $\boxed{S(15|0)}$ ergibt. Wegen $\boxed{R(-15|24)}$ gilt dann $M_{RS}(0|12)$, woraus folgt, dass M_{RS} auf der y-Achse liegt, welche ja gleichzeitig auch die Scheitelpunkttangente ist, w.z.z.w.