Technik des Abspaltens

$x^3 - x_1^3$.

$$\underbrace{a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0}_{P_4(x)}$$

Gehe von einer Lösung x_1 aus, d.h. $\boxed{P_4(x_1) = 0}$, ergo:

$$P_4(x) - P_4(x_1) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 - a_4x_1^4 - a_3x_1^3 - a_2x_1^2 - a_1x_1 - a_0 \quad *$$

$$\boxed{x^n - y^n = (x-y)\cdot(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})} \quad \text{Regel von HORNER}$$

$$* \; a_4(x^4 - x_1^4) + a_3\cdot(x^3 - x_1^3) + a_2(x^2 - x_1^2) + a_1(x - x_1) =$$

$$= (x - x_1)\cdot\left[a_4(x^3 + x^2x_1 + xx_1^2 + x_1^3) + a_3(x^2 + x_1x + x_1^2) + a_2(x + x_1) + a_1\right]$$

$$= (x - x_1)\cdot\underbrace{\left[a_4x^3 + \underbrace{(a_4x_1 + a_3)}_{\gamma}\cdot x^2 + \underbrace{(a_4x_1^2 + a_3x_1 + a_2)}_{\beta}\cdot x + \underbrace{a_4x_1^3 + a_3x_1^2 + a_2x_1 + a_1}_{\alpha}\right]}_{P_3(x)}$$

Veranschaulichung:

$$P_4(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_4(x_1) = x_1\cdot\underbrace{(a_4x_1^3 + a_3x_1^2 + a_2x_1 + a_1)}_{\alpha} + a_0$$

$$P_4(x_1) = x_1\cdot(x_1\underbrace{(a_4x_1^2 + a_3x_1 + a_2)}_{\beta} + a_1) + a_0$$

$$P_4(x_1) = x_1(x_1(x_1\underbrace{(a_4x_1 + a_3)}_{\gamma} + a_2) + a_1) + a_0$$

Zusammenfassung: mögliche Fälle spezieller Punkte

	f'	f''	f'''	...	$f^{(n)}$	
x_0	0 (notw.)	$\begin{matrix}>0\\<0\end{matrix}$ (hinr.)				MIN MAX
x_0	0	0	0	...	$\neq 0$ $\begin{matrix}>0\\<0\end{matrix}$	MIN MAX n ist Gerade $\Rightarrow$
x_0	/	0 (notw.)	$\begin{matrix}>0\\<0\end{matrix}$ (hinr.)			R-L-W L-R-W
x_0	/	0	0	...	$\neq 0$ $\begin{matrix}>0\\<0\end{matrix}$	R-L-W L-R-W n ist Ungerade
x_0	0	0	0	...	$y^{(2n+1)} \neq 0$	$\Rightarrow$ Sattelpunkt
		"			$y^{(2n)} \neq 0$	$\Rightarrow$ Hoch-/Tiefpunkt
x_0	$\neq 0$	0	0	...	$y^{(2n)} \neq 0$	$\Rightarrow$ FLACHPUNKT