Eine Mathematikaufgabe für groß und klein

erstellt von Dr. Robert Resel (www.matheprof.at)

$$M = \begin{pmatrix} p & 2p-4q+3r & q \\ r & p-q+r & 2p-2q+r \\ 2p-3q+2r & 2q-r & p-2q+2r \end{pmatrix}$$

Die Matrix M ist eine sogenannte magische Matrix (auch unter dem geläufigeren Begriff "magic square" bekannt!). Dies bedeutet, dass die Summe ihrer (insgesamt neun) Eintragungen in jeder Zeile, Spalte und Diagonale gleich ist.

1. Klasse: Wähle drei natürliche Zahlen p, q und r so, dass die Ungleichungskette $\frac{r}{2} < q < \frac{p}{2} + \frac{r}{2}$ erfüllt ist. Nun setze die Zahlen in die Matrix ein und überzeuge dich davon, dass die Matrix wirklich magisch ist!

2. Klasse: Wähle drei Bruchzahlen p, q und r so, dass die Ungleichungskette $\frac{r}{2} < q < \frac{p}{2} + \frac{r}{2}$ erfüllt ist. Nun setze die Zahlen in die Matrix ein und überzeuge dich davon, dass die Matrix wirklich magisch ist!

3. Klasse: Wähle drei beliebige rationale Zahlen p, q und r, setze sie in die Matrix ein und überzeuge dich davon, dass die Matrix wirklich magisch ist! Berechne außerdem die magische s Summe in Abhängigkeit von p, q und r!

4. Klasse: Zeige: Erfüllen drei positive reelle Zahlen p, q und r die Ungleichungskette $\frac{r}{2} < q < \frac{p}{2} + \frac{r}{2}$, so ist die Matrix M nicht nur magisch, sondern hat auch zur Gänze positive Eintragungen.

Solltest du an derlei Dingen Gefallen finden, dann melde dich bei Prof. Resel und sprich ihn sowohl auf die Mathematikolympiade als auch auf das Wahlpflichtfach an!

6. Klasse: Fasse die drei Spalten der Matrix M als Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ auf und beweise:
$S = \left|\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}\right|$ sowie jede beliebige andere (der insgesamt sechs möglichen) Anordnung(en) ergibt den Wert $S = 3 \cdot \left|s \cdot (p-q) \cdot (p-3q+2r)\right|$, wobei s die magische Summe von M ist.

Zusatzfrage: Warum wurden (was eigentlich dem "guten mathematischen Umgangston" entspräche!) im Vektorterm zwischen den Betragsstrichen in S keine Klammern gesetzt?

Bemerkung: Dieser Vektorterm heißt Spatprodukt der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ und findet in der *Analytischen Geometrie bzw. der Linearen Algebra* (Stoff der 6. Klasse) eine Anwendung bei der Berechnung von Rauminhalten bzw. dem Lösen von Gleichungssystemen dreier Gleichungen in drei Unbekannten (Prof. Resel, Vormittagsunterricht)!

→ Im Wahlpflichtfach (WPF) setzen wir uns dann über dieses gemischt Produkt hinaus mit äußerst interessanten Mehrfach-Vektorprodukten auseinander und beweisen u.a. $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - \left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right) \cdot \vec{a}$ (Bis du einmal das WPF besuchst, kannst du ja einstweilen für selbst gewählte Vektoren prüfen, dass dies stimmt!) Auf www.matheprof.at findest du bei einer fünften oder sechsten Klasse ein Skriptum zur Analytischen Raumgeometrie, wo du bereits Einiges über Vektoren im Raum (u.a. auch über das Vektorielle Produkt) erfahren kannst!