



## 51. Österreichische Mathematische Olympiade 2020

### Neun (bzw. 15) Aufgaben zum Thema "Ungleichungen"

Kursleiter: Dr. Robert Resel

1. Es bezeichne  $Q$  bzw.  $A$  resp.  $G$  und schließlich  $H$  das quadratische bzw. arithmetische resp. geometrische und schließlich harmonische Mittel zweier positiver reeller Zahlen. Man beweise:

$$QH \leq AG$$

Wann gilt Gleichheit?

2. Mit den gleichen Bezeichnungen wie in Aufgabe 1 sei zusätzlich  $W$  via

$$W(x, y) := \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2} \text{ für } x \in \mathbb{R} \text{ sowie } y \in \mathbb{R}^+$$

definiert. Man beweise:

$$G \leq W^2 \leq A$$

Wann gilt Gleichheit?

3. Es seien  $a$ ,  $b$  und  $c$  positive reelle Zahlen. Man beweise:

$$\frac{a^2 + b^2}{a + b} + \frac{b^2 + c^2}{b + c} + \frac{a^2 + c^2}{a + c} \geq a + b + c$$

Wann gilt Gleichheit?

4. Es seien  $a$  und  $b$  nichtnegative reelle Zahlen  $a$  und  $b$  mit  $a + b = 1$ . Man beweise:

$$\frac{1}{2} \leq \frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2} \leq 1$$

Wann gilt Gleichheit in der linken Ungleichung, wann in der rechten?

5. Es seien  $a$ ,  $b$  und  $c$  positive reelle Zahlen. Man beweise:

$$\frac{a}{c} + \frac{c}{b} \geq \frac{4a}{a+b}$$

Wann gilt Gleichheit?

6. Es seien  $a$  und  $b$  positive reelle Zahlen. Man beweise:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}$$

Wann gilt Gleichheit?

7. Für  $x \in \mathbb{R}^+$  und  $y \in \mathbb{R}^+$  mit  $x+y = 4$  ist die Ungleichung  $\frac{(2x+1)^2}{x} + \frac{(2y+1)^2}{y} \geq 25$  zu beweisen. Wann gilt Gleichheit?

8. Es seien  $a$  und  $b$  nichtnegative reelle Zahlen. Man beweise:

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} \geq \frac{1}{1+ab}$$

Wann gilt Gleichheit?

9. Es seien  $a$  und  $b$  positive reelle Zahlen. Man beweise:

$$\frac{1}{a^2+b^2} - \frac{1}{(a+b)^2} \leq \frac{1}{4ab}$$

Wann gilt Gleichheit?

Weitere sechs Aufgaben:

- Aufgabe 1 aus den 48 vermischten Aufgaben
- Aufgabe 4 aus den 48 vermischten Aufgaben
- Aufgabe 5 aus den 48 vermischten Aufgaben
- Aufgabe 7 aus den 48 vermischten Aufgaben
- Aufgabe 11 aus den 48 vermischten Aufgaben
- Aufgabe 26 aus den 48 vermischten Aufgaben

Gutes Gelingen!

Wien, im Juli 2019.

Dr. Robert Resel, eh.