9) Hypothetische Situation: Carola bearbeitet (freilich nicht stehend wie rechts!) bei der schriftlichen Mathematik-Klausur u.a.(!) nebenstehende Aufgabenstellung und kommt bei Beispiel b) auf das Resultat

> **Durch k: $2a^2y^2 = \tan^2\alpha \cdot x^2\cdot(2a^2-x^2)$ ist eine LISSAJOUS-Kurve k gegeben, welche bei Rotation um die x-Achse rechts von der y-Achse einen tropfenförmigen Drehkörper erzeugt.**
>
> **a) Zeige, dass α der spitze Schnittwinkel zwischen einer der beiden Doppeltangenten und der Symmetrieachse von k ist.**
>
> **b) Leite für den Gürtelkreisflächeninhalt $\mathcal{A}$ des oben genannten Drehkörpers durch biquadratische Approximation eine Näherungsformel** (in Abhängigkeit von a und α) **her!**

$\mathcal{A} = a^2\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\alpha^2+\frac{1}{3}\cdot\alpha^4\right)$.

Verifiziere oder korrigiere ihr Resultat!

10) Hypothetische Situation: Karina bearbeitet (freilich nicht stehend wie rechts!) bei der schriftlichen Mathematik-Klausur u.a.(!) nebenstehende Aufgabenstellung und kommt bei Beispiel b) auf das Resultat

> **Durch k: $3ay^2 = \tan^2\alpha \cdot x^2\cdot(x+3a)$ ist ein NEWTON-Knoten k gegeben, dessen Schleife bei Rotation um die x-Achse einen tropfenförmigen Drehkörper erzeugt.**
>
> **a) Zeige, dass α der spitze Schnittwinkel zwischen einer der beiden Doppeltangenten und der Symmetrieachse von k ist.**
>
> **b) Leite für den Gürtelkreisflächeninhalt $\mathcal{A}$ des oben genannten Drehkörpers durch biquadratische Approximation eine Näherungsformel** (in Abhängigkeit von a und α) **her!**

$\mathcal{A} = \frac{4a^2\pi}{9}\cdot\left(3\alpha^2+2\alpha^4\right)$.

Verifiziere oder korrigiere ihr Resultat!

13) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$.
Approximiere f an der Stelle $x_0 = 1$ durch ihr Taylorpolynom zweiter Ordnung und zeige, dass der Graph des Taylorpolynoms mit dem Graphen von f keine weiteren Punkte gemeinsam hat!

14) Die reelle Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = ax^3 + \frac{b}{x^3}$ soll an der Stelle $x_0 = 1$ durch ihr kubisches Taylor-Polynom p_3 approximiert werden.

- Zeige, dass der Parameter a nur auf den Koeffizienten des kubischen Glieds Einfluss hat.
- Zeige, dass der Graph von p_3 für kein Zahlenpaar $(a|b)$ mit dem Graphen von f neben $P(1|y_P)$ weitere Punkte gemeinsam hat.
- Zeige, dass die komplexen Lösungen der Gleichung $p_3(x) = f(x)$ weder von a, noch von b abhängen und auch als nicht-reelle Lösungen der kubischen Gleichung $50x^3 - 3x - 2 = 0$ auftauchen.

15) Ein Kurventeil des Newtonschen Knotens mit der Gleichung $\boxed{y^2 = b^2x^2(x+a),\ a>0}$ ist im Ursprung durch das entsprechende Taylorpolynom 2. Grades zu approximieren.
Beweise, dass der Graph des Taylorpolynoms mit dem Newton-Knoten nur den Ursprung gemeinsam hat. Welche Art der Berührung liegt vor?

16) Ein Kurventeil des Newtonschen Knotens mit der Gleichung $\boxed{y^2 = b^2x^2(x+a),\ a>0}$ ist im Ursprung durch das entsprechende Taylorpolynom 2. Grades zu approximieren.
Beweise: Der Inhalt des Gebiets, welches der Newton-Knoten mit der x-Achse begrenzt, beträgt exakt 40% des Inhalts jenes Gebiets, welches der Graph des Taylorpolynoms mit der x-Achse begrenzt.

17) Ein Kurventeil des Newtonschen Knotens mit der Gleichung $\boxed{y^2 = b^2x^2(x+a),\ a>0}$ ist im Ursprung durch das entsprechende Taylorpolynom 2. Grades zu approximieren. Rotiert der schleifenförmige Teil des Newton-Knotens bzw. der Graph des Taylorpolynoms zwischen den Nullstellen um die x-Achse, so entstehen zwei Drehkörper.
Beweise: Das Volumen des kleineren im größeren enthaltenen Drehkörpers beträgt $31\frac{1}{4}$ % des Rauminhalts des größeren Drehkörpers.

18) Der Newtonsche Knoten mit der Gleichung $\boxed{y^2 = b^2x^2(x+a),\ a>0}$ ist im Tiefpunkt durch das entsprechende Taylorpolynom 2. Grades zu approximieren.
Beweise, dass der Graph des Taylorpolynoms mit dem Newton-Knoten im zweiten Quadranten noch einen weiteren Punkt P gemeinsam hat. Rechne optional mit den Parametern oder der konkreten Kurve mit der Gleichung $25y^2 = x^2\cdot(x+27)$!

19) Der "liegende Achter" mit der Gleichung $\boxed{y^2 = b^2x^2(2a^2-x^2)}$ ist im im vierten Quadranten liegenden Tiefpunkt durch das entsprechende Taylorpolynom 2. Grades zu approximieren.
Beweise, dass der Graph des Taylorpolynoms mit dem "liegenden Achter" im ersten Quadranten noch einen weiteren Punkt P gemeinsam hat. Rechne optional mit den Parametern oder der konkreten Kurve mit der Gleichung $y^2 = x^2\cdot(50-x^2)$!

20) a) Approximiere die durch P(h|r) verlaufende NEILsche Kurve k [k:$y^2=ax^3$] im Punkt P durch ihr TAYLOR-Polynom zweiten Grades und berechne die Koordinaten des zweiten gemeinsamen Punkts S!
b) Berechne den Inhalt der von k und dem Graphen des TAYLOR-Polynoms begrenzten Fläche!
Kontrolliere die relative gute Übereinstimmung mit $\frac{183}{440}\mathrm{rh}$!

21) a) Approximiere die durch P(h|r) verlaufende Kurve k [k:$y^2=ax^5$] im Punkt P durch ihr TAYLOR-Polynom zweiten Grades und zeige, dass es keine weiteren gemeinsamen Punkte gibt!
b) Berechne den Inhalt der von k, dem Graphen des TAYLOR-Polynoms sowie der y-Achse begrenzten Fläche!

22) Approximiere den Kreis k [k: $x^2 + y^2 = 2$] in einem seiner Punkte P(x|y) mit |x|=|y| durch ein Taylor-Polynom zweiten Grades und ermittle die Koordinaten weiterer gemeinsamer Punkte. Wie viele muss es deren geben (Begründung vor der Rechnung!)?

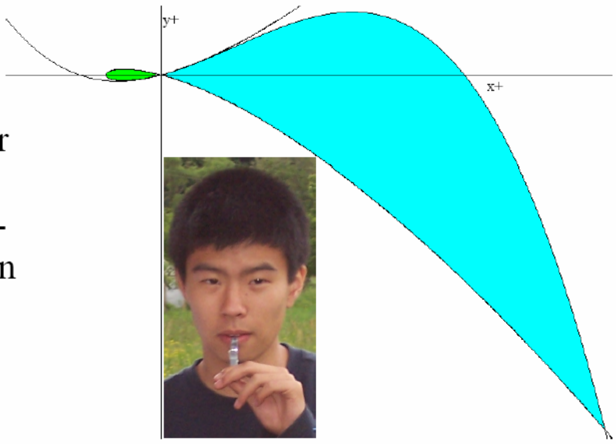
23) Approximiere die Kurve k: $y = 2x+x^{-2}$ in einem unbestimmten Punkt T(t|y(t)) durch ihr Taylor-Polynom zweiten Grades p, begründe, warum k und der Graph von p noch einen weiteren Punkt S gemeinsam haben (müssen) und berechne die Koordinaten von S in Abhängigkeit von t. Begründe ferner verbal (Fachausdrücke!), warum dies für alle Taylor-Polynome (beliebiger Ordnung) gilt!

24) Approximiere eine Parabel in erster Hauptlage mit dem Brennpunkt F in dem über F liegenden Punkt durch ein kubisches Taylorpolynom und zeige, dass es keine weiteren gemeinsamen reellen Schnittpunkte gibt.

25) Approximiere den NEWTON-Knoten k [k: $64y^2 = 15ax^2 \cdot (x+3a)$] in seinem Tiefpunkt durch ein TAYLOR-Polynom 2. Grades und zeige, dass die beiden Kurven einander im zweiten gemeinsamen Punkt rechtwinklig schneiden.

26) Approximiere die LISSAJOUS-Kurve k [k: $768a^2y^2 = 175x^2 \cdot (2a^2 - x^2)$] in ihrem Tiefpunkt durch ein TAYLOR-Polynom 2. Grades und zeige, dass die zwei Kurven einander im 2. gemeinsamen Punkt rechtwinklig schneiden.

27) In nebenstehender Abbildung sind sowohl der NEWTONsche Knoten k mit der Gleichung k: $y^2 = 25x^2 \cdot (x+9)$ als auch der Graph jenes Taylor-Polynoms dritter Ordnung zu sehen, welcher den ansteigenden Teil von k im Ursprung approximiert. φιλ behauptet, dass sich die Flächeninhalte der markierten Gebiete wie 128:1 verhalten. Prüfe dies nach!



Gutes Gelingen beim Lösen dieser schönen Aufgaben!

Wien, im September 2008. Dr. Robert Resel, e. h.

Lösungen zu ausgewählten abschließenden Übungsbeispielen (TAYLOR-Polynome)

8C, Realgymnasium, 2008/09

1) $\frac{4829005}{371293} = 13{,}0059144...$
$\sqrt[3]{2200} = 13{,}0059144...$

2) $\frac{309671}{21952} = 14{,}1067328...$
$\sqrt{199} = 14{,}1067359...$

3) $\frac{69767}{23328} = 2{,}99069787...$
$\sqrt[4]{80} = 2{,}99069756...$

4) $\frac{32763}{16000} = 2{,}0476875$
$\sqrt[5]{36} = 2{,}04767251...$

5) Bam, passt!

6) In der Klammer gehört in den Nenner des ersten Bruchs 24 statt 42!

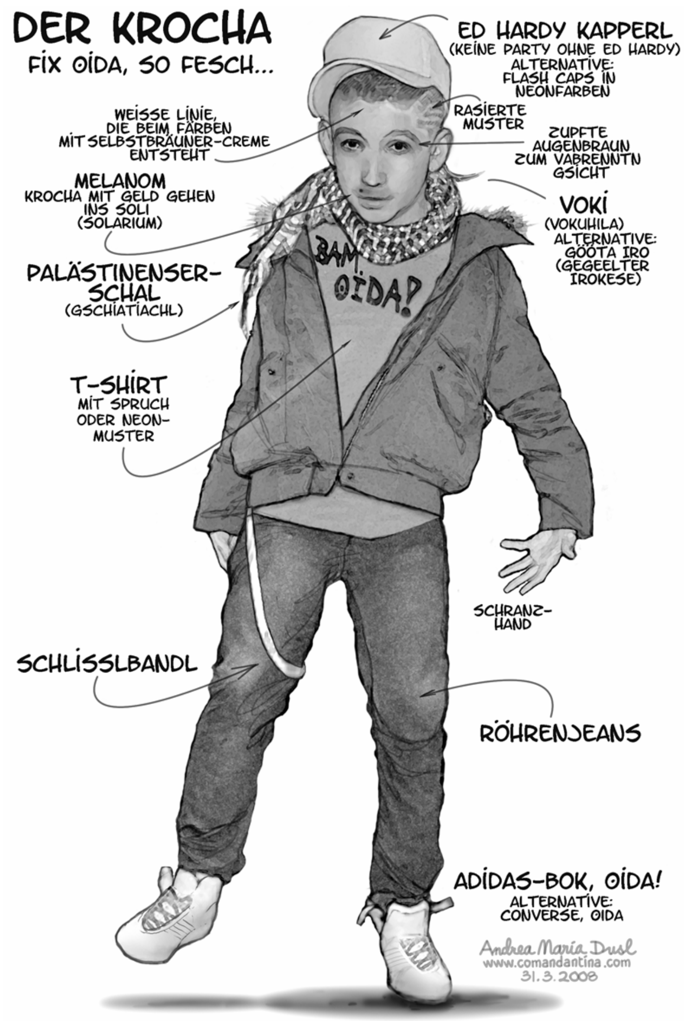
7) In der Klammer gehört in den Nenner des zweiten Bruchs 192 statt 129!

8) Die vollständige Näherungsformel lautet $h \approx s \cdot \left(\frac{1}{8} \cdot \alpha^2 + \frac{5}{384} \cdot \alpha^4\right)$!

9) Benny absolut, Tommy relativ. Beide "Einwohner des Polizeihauses" haben fehlerfrei gerabeitet!☺

10) In der Klammer gehört in den Nenner des zweiten Bruchs 240 statt 24!

11) Bam, passt!



12) Bam, passt!

13) keine weiteren gemeinsamen Punkte, weil die reduzierte quadratische Gleichung $x^2 + x + 16 = 0$ lautet.

15) Sogar Berührung von dritter Ordnung (Hyperoskulation)!

18) P(–2|2)

19) P(1|7)

20) a) $S\left(\frac{h}{9}\middle|-\frac{r}{27}\right)$, b) exakter Flächeninhalt: $\frac{1516rh}{3645}$

21) b) $\frac{5rh}{56}$

22) Siehe Aufgabe 33 in §2 (WS 2008/09)!

23) $S\left(-\frac{t}{3}\middle|-\frac{2t}{3} + \frac{9}{t^2}\right)$