



Übungsbeispiele sowohl für die dreistündige Schularbeit als auch die schriftliche Matura (8C, Realgymnasium, 2008/09)



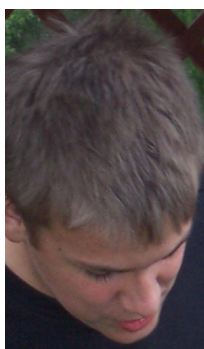
Diese Beispiele sollen durch die sowohl für die dreistündige Schularbeit als auch die schriftliche Matura relevanten Stoffgebiete führen, wobei an dieser Stelle mit den **TAYLOR-Polynomen** ein Kapitel der 8. Klasse exemplarisch nochmals aufgerollt wird, und zwar anhand von Aufgaben, deren "Bausteine" geradezu charakteristisch für Maturabeispiele sind.

ACHTUNG! Ein bloßes "Auswendiglernen" der Beispiele ist sicher keine ausreichende Matura- resp. Schularbeitsvorbereitung, da du deine erworbenen Kenntnisse sowohl bei der dreistündigen Schularbeit als auch bei der schriftlichen Matura auf Problemstellungen anzuwenden hast, die zwar nicht gänzlich neuartig, aber zum Teil in der Form wie bei der dreistündigen Schularbeit resp. der schriftlichen Matura gestellt in dieser Aufgabensammlung nicht enthalten sind! Ein eigenständiges Lösen dieser Aufgaben (bis auf jene, die wir in diversen Schulübungen gemeinsam bearbeiten werden) ist eine absolute Notwendigkeit für ein angemessenes Übungsprogramm!



- 1) Es ist für $\sqrt[3]{2200}$ eine rationale Näherung zu bestimmen, welche durch Einsatz eines Taylor-Polynoms zweiter Ordnung trotz Verwendung eines ganzzahligen Δx möglichst genau sein soll.
- 2) Berechne unter Verwendung eines Taylorpolynoms zweiter Ordnung eine Approximation von $\sqrt{199}$ in Form einer Bruchzahl. Wähle dazu das betragskleinste ganzzahlige Δx !
- 3) Für $\sqrt[4]{80}$ ist die bestmögliche rationale Approximation zu ermitteln, welche durch ein quadratisches Taylor-Polynom erzielt werden kann, wenn Δx dennoch ganzzahlig sein soll.
- 4) Mittels **kubischer Approximation** (bei ganzzahligem Δx) ist ein möglichst guter rationaler Näherungswert für $\sqrt[5]{36}$ zu erzeugen.

5)



Für den Flächeninhalt $\mathcal{A}$ eines Parabelsegments, dessen erzeugende Sehne der Länge b in ihren Endpunkten von der Parabel unter dem Winkel α (im Bogenmaß!) geschnitten wird, gilt für kleine Winkel die Näherungsformel

$$\mathcal{A} \approx b^2 \left(\frac{1}{6}\alpha + \frac{1}{18}\alpha^3 \right),$$

wie der österreichische Nachwuchsmathematiker ROLLINGER kürzlich erst bewiesen hat (mit bedeutsamen Auswirkungen auf den Brückenbau!). Stimmt seine Formel (ergo: können wir ohne Sorgen Brücken überqueren, bei deren Bau Rollingers Formel verwendet wurde)? Prüfe durch selbständiges Herleiten nach!

- 6)  In den Endpunkten eines Kreisbogens vom Radius r (Öffnungswinkel des zugehörigen Kreissektors α im Bogenmaß gemessen!) werden die Tangenten gelegt, welche zusammen mit dem Kreisbogen ein konkaves Flächenstück begrenzen, für dessen Flächeninhalt $\mathcal{A}$ in guter Näherung (vorausgesetzt, α ist hinreichend klein!) die Formel

$$\mathcal{A} \approx r^2 \left(\frac{1}{42} \alpha^3 + \frac{1}{240} \alpha^5 \right)$$

gilt, was der angewandte Biomathematiker E. LOMOSCHITZ zur Modellierung von Entenschnäbeln verwendet hat, wobei er die Formel selbst hergeleitet hat. Hat er sich dabei nicht verschrieben? Prüfe nach, indem du selbst (wie E. Lomoschitz!) "für die Enten rechnest"!

- 7)  In den Basisendpunkten eines gleichschenkligen Dreiecks (Schenkellänge s , Winkel α an der Spitze im Bogenmaß gemessen!) werden Normale auf die Schenkel gelegt, welche Tangenten einer Parabel sind, deren Symmetrieachse die Trägergerade der Höhe des Dreiecks auf die Basis ist. In folgende Formel für die näherungsweise Berechnung der Höhe h jenes Parabelsegments, welches die Basis und die Parabel miteinander begrenzen,

hat sich ein Fehler eingeschlichen! $h \approx s \cdot \left(\frac{1}{8} \alpha^2 + \frac{1}{129} \alpha^4 \right)$ Stelle ihn richtig!

Diese geometrische Form eignet sich zum Modellieren von Längsschnitten für Eistüten, wobei das rotierende Dreieck die Tüte und das rotierende Parabelsegment den herausragenden Teil vom Eis

beisteuert. Mitunter also ein Modell für EEE (Emmy's Enten-Eis), auf das sich unser Klassenerpel scheinbar so gefreut hat, dass ihm glatt ein Rechenfehler unterlaufen ist ... J/L

- 8) In den Basisendpunkten eines gleichschenkligen Dreiecks (Schenkellänge s , Winkel α an der Spitze im Bogenmaß gemessen!) werden Normale auf die Schenkel gelegt, welche Tangenten einer gleichseitigen Hyperbel sind, deren Hauptachse die Trägergerade der Höhe des Dreiecks auf die Basis ist. In folgender Formel für die näherungsweise Berechnung der Höhe h jenes Hyperbelsegments, welches die Basis und die Hyperbel miteinander begrenzen,

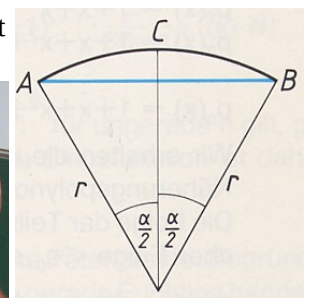
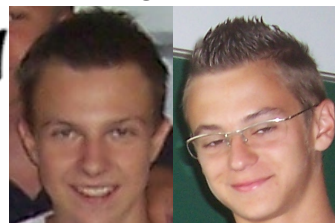
hat Emmy an einer Stelle – wie ... $h \approx s \cdot \left(\frac{1}{8} \alpha^2 + \alpha^4 \right)$... man sieht – in einem

Anfall von Übermut (Naja, mit Kapperl kunzelt es bei ihm zuweilen ein wenig!) durch Anbringen eines Pickerls eine Lücke gebildet, die es nun zu schließen gilt!



- 9) Misst man anstelle der Länge des Kreisbogens AB die Länge der Sehne AB, so begeht man natürlich einen Fehler, den man entweder absolut oder relativ angeben kann. Benny und Tommy berechnen durch kubische Approximation beide Fehlerarten und erhalten die Resultate $\frac{\alpha^3}{24}$ (Benzinator) und $\frac{\alpha^2}{24}$ (Irrlicht).

- a) Wer hat nun welchen Fehler berechnet? Roli's left eye!
b) Sind dabei Fehler passiert oder nicht?



- 10) Für den Flächeninhalt F eines Kreissegments erhält Jan für kleine Werte des Zentriwinkels α durch quintische Approximation die Näherungsformel $F \approx r^2 \cdot \left(\frac{1}{12} \alpha^3 - \frac{1}{24} \alpha^5 \right)$. Hat Jan richtig gerechnet bzw. das Resultat richtig eingetippt?

