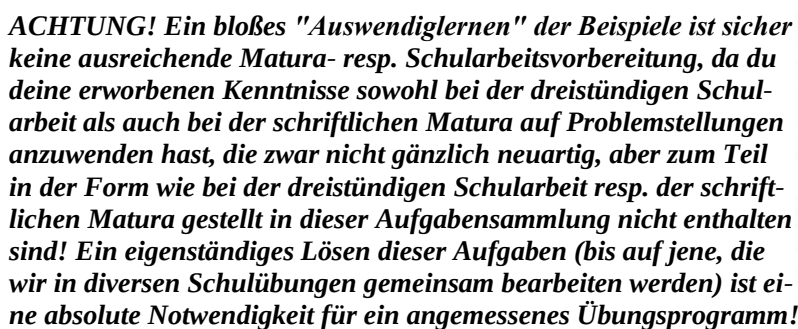
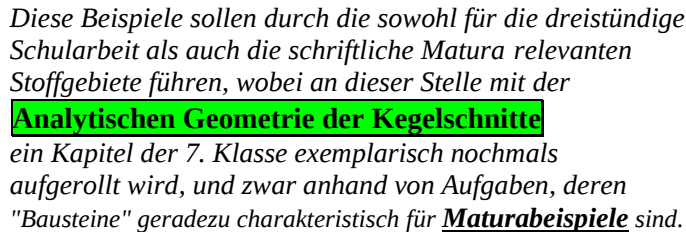
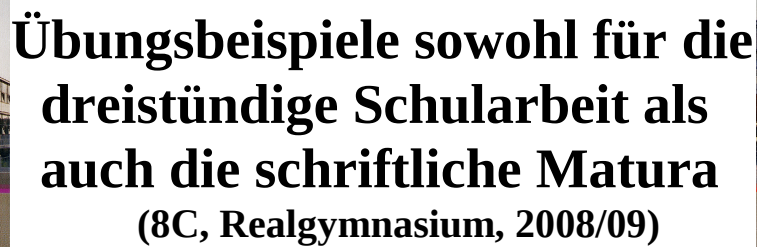
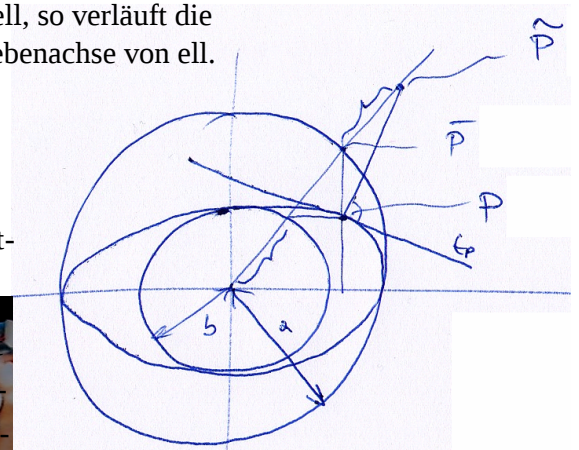




... bei Kegelschnittsaufgaben stets gegeben (wie die Erfahrung – Wintersemester 2007/08! – lehrt)!!!

Satz. Sind C und D die Nebenscheitel einer Ellipse ell in erster Hauptlage, für welche $e = b\sqrt{2}$ gilt sowie E ein beliebiger Punkt auf ell, so verläuft die EULERSche Gerade¹ des Dreiecks $\triangle CDE$ parallel zur Nebenachse von ell. Verifiziere diesen Satz für den Punkt E(9|3)!

- 2) Nebenstehende (Zumutung² einer! ☺) Skizze illustriert eine Tangentenkonstruktion für die Tangente t_P an ell (erste Hauptlage, halbe Haupt- bzw. Nebenachsenlänge a bzw. b) in P.



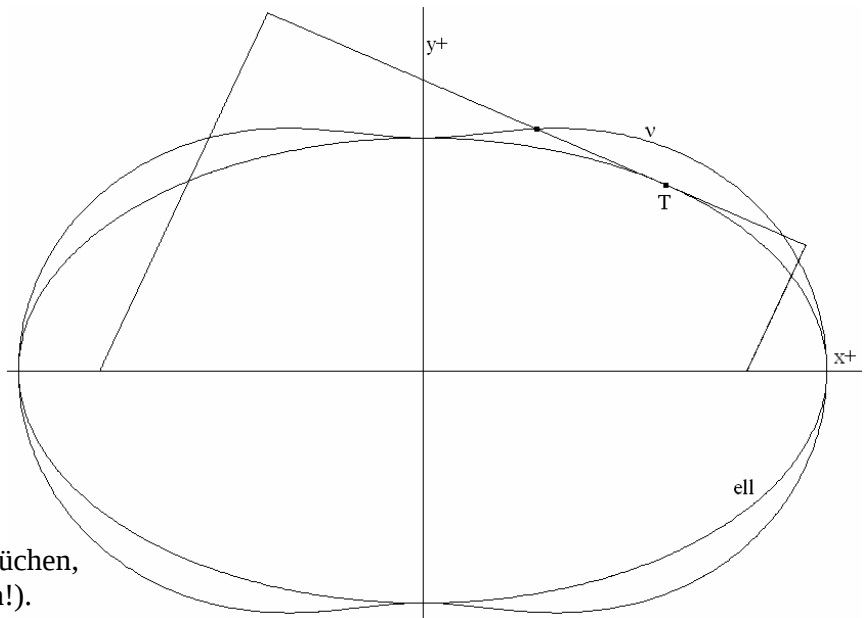
Beweise diese Konstruktion oder/und(!) überprüfe sie für $P(15|y_P > 0)$ und ell.: $16x^2 + 25y^2 = 10000$!

Anmerkung: Dein matheprof.(at) und Albert EINSTEIN (1879–1955) verdecken deshalb einen Teil des Textes, weil du zunächst selbst probieren soll(te)st, die illustrierte Konstruktion ohne zusätzliche verbale Beschreibungen nachzuvollziehen. Für alle Fälle findest du diesen Textteil ohne Hintergrundbild bei den Lösungen! ☺

¹Zur Erinnerung: Auf der EULERSchen Gerade eines Dreiecks liegen die merkwürdigen Dreieckspunkte H, S und U (... und dies übrigens so, dass stets $\overline{HS} = 2 \cdot \overline{SU}$ gilt und S zwischen H und U liegt).

²: aber **gut beschriftet**, und **dies** ist die halbe Miete! ☺

- 3) In nebenstehend abgebildetem Koordinatensystem sind eine Ellipse samt ihren Brennpunkten sowie jenem Teil einer Tangente eingezeichnet, welcher zwischen den Lotfußpunkten der Brennpunkte auf die Tangente liegt.



- a) Es ist anhand der konkreten Ellipse ell [ell.: $9x^2 + 25y^2 = 2082249$] für $T(b|y_T > 0)$ nachzurechnen, dass der Mittelpunkt der eingezeichneten Tangentenstrecke stets auf der Kurve v : $(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2$ liegt, wenn von der Ellipse ell mit der Gleichung ell.: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ausgegangen wird (Dabei ist mit Brüchen, nicht mit Dezimalzahlen zu rechnen!).
- b) Es lässt sich mit etwas schärferen Geschützen (gleichsam "Integralrechnung auf der Überholspur") zeigen, dass der von v umschlossene Bereich einen Flächeninhalt von $\frac{\pi}{2} \cdot (a^2 + b^2)$ aufweist. Zeige unter Verwendung dieser Formel, dass dieser Flächeninhalt um genau so viel größer als der Ellipsenflächeninhalt ist, als der Flächeninhalt eines Halbkreises mit dem Radius $a - b$!

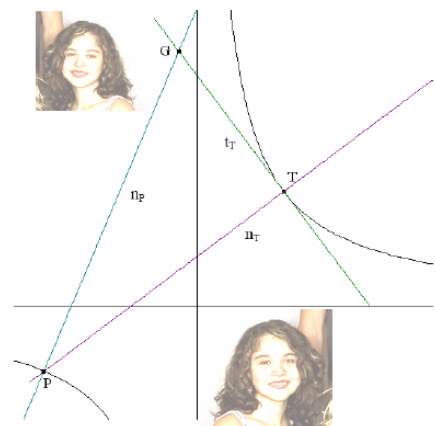
- 4) a) Beweise folgende alternative geometrische Interpretation des Parabelparameters p aus der Parabelgleichung **par.: $y^2 = 2px$** : P ist die y -Koordinate des direkt über dem Parabelbrennpunkt liegenden Parabelpunkts.
- b) Überträgt man das Ergebnis aus a) auf die Ellipse, so ist für die Ellipse ell mit der Gleichung **ell.: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$** (o.B.d.A. in erster Hauptlage, ergo $a > b$) zu zeigen, dass ihr Parameter exakt $\frac{b^2}{a}$ ergibt.
- c) Für eine Parabel par in erster Hauptlage und eine Ellipse ell in (erster) Hauptlage gilt folgender **SATZ**. Bezeichnet k das Verhältnis des Parabelparameters zum Ellipsenparameter sowie k_{ell} bzw. k_{par} die Steigung der Ellipsen- bzw. Parabeltangente in einem Schnittpunkt von par und ell, so gilt die Gleichung **$k_{ell} : k_{par} = 1 - (k^{-2} + 1)^{1/2}$** .
Verifiziere diesen Satz für die Ellipse ell.: $3x^2 + 4y^2 = 2352$ und die Parabel par.: $y^2 = 144x$!

5) ... Erkenntnisse aus der Nachbarklasse ... ☺

Zwei Tage nach ihrem 16. Geburtstag entdeckte die "Inkognito-Mathematikerin" ☺ N. GARFIAS folgenden **SATZ** (Satz von GARFIAS, 2007), vgl. dazu auch die nebenstehende Abbildung!

Legt man in einem Punkt $T(x_T | y_T)$ einer gleichseitigen Hyperbel hyp, welche die Koordinatenachsen als Asymptoten besitzt, sowohl die Tangente t_T als auch die Normale n_T , ermittelt den zweiten gemeinsamen Punkt P von n_T und hyp, legt ebendort auch die Normale n_P an hyp und schneidet schließlich n_P mit t_T , so gilt für diesen Schnittpunkt G

("GARFIAS-Punkt") die Darstellung $G\left(x_T + \frac{x_T^2 - y_T^2}{x_T y_T^2} \middle| y_T + \frac{y_T^2 - x_T^2}{x_T^2 y_T}\right)$.



Bestätige dieses Juwel der Elementargeometrie für den Punkt $T(432 | 576)$, wobei hyp die Koordinatenachsen als Asymptoten besitzt! [Zur Kontrolle: $P(-768 | -324)$, $G(-93 | 1276)$]

Zusatz (RESEL, 2007): Kontrolliere am vorliegenden Beispiel $T(432 | 576)$, dass für den Flächeninhalt μ des Dreiecks $\Delta P T G$ die Formel $\mu = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x_T}{y_T} + \frac{y_T}{x_T}\right)^3 \cdot |x_T^2 - y_T^2|$ gilt! [Zur Kontrolle: $\mu = 656250$]