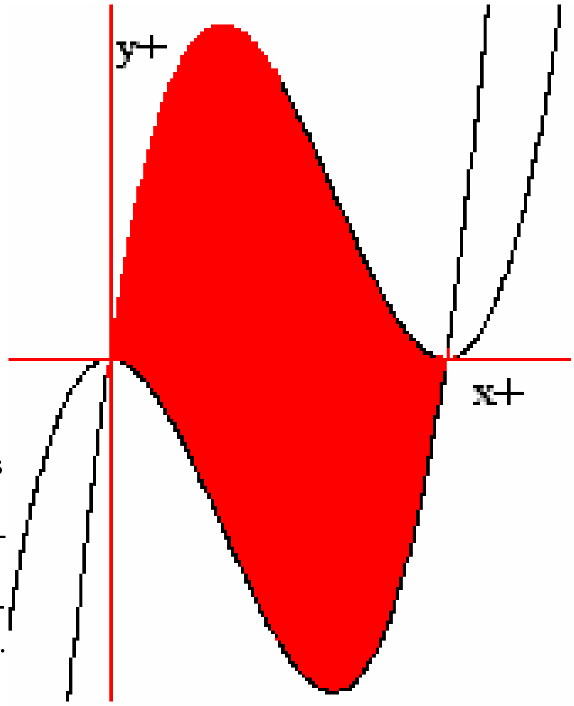
34) In nebenstehender Figur sind die Graphen der Polynomfunktionen f und g mit den Funktionsgleichungen $y=f(x)=x^3-6x^2$ und $y=g(x)=x^3-12x^2+36x$ sowie das von Γ_f und Γ_g begrenzte Gebiet abgebildet.



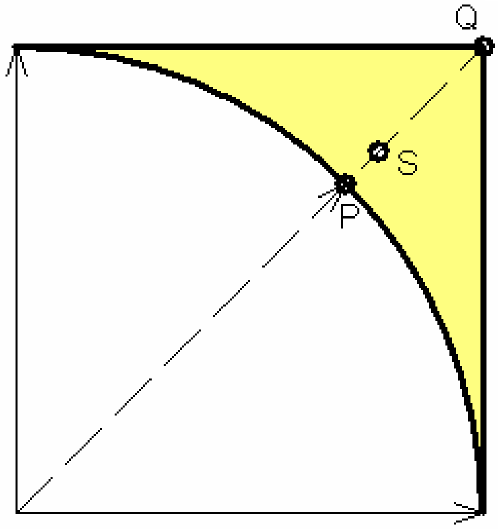
a) Beschrifte die Graphen in der Abbildung und begründe deine Entscheidung jeweils!

b) Zeige, dass $\overrightarrow{H_fH_g}=\overrightarrow{T_fT_g}$ gilt. Da eine Polynomfunktion durch Vorgabe des Hoch- und Tiefpunkts ihres Funktionsgraphen eindeutig festgelegt ist und sowohl f als auch g normiert sind, folgt daraus, dass Γ_f und Γ_g kongruent sind, was sich durch eine Gleichung der Form $\boxed{f(x)+a=g(x+b)}$ (*) ausdrücken läßt. Gib a und b an, begründe deine Wahl und beweise, dass (*) in der Tat $\forall\, x\in\mathbb{R}$ gilt.

c) Berechne den maximalen vertikalen Durchmesser des oben gefärbten Gebiets sowie die Koordinaten der Endpunkte F und G. Zeige, dass die Tangenten an die jeweilige Kurve in F und G zueinander parallel verlaufen und begründe dies allgemein anhand der Genese dieser Extremwertaufgabe!

d) Berechne den Flächeninhalt sowie die Koordinaten des Schwerpunkts $S(\xi|\eta)$ des gefärbten Gebiets! Kontrolliere, dass $S=M_{FG}$ gilt!

e) Das gefärbte Gebiet wird durch die x-Achse in zwei Teile geteilt.
e1) In welchem Verhältnis erfolgt diese Teilung?
e2) Zeige ohne Rechnung unter Verwendung von d), dass durch Rotation jedes der beiden Teilgebiete zwei Drehkörper von gleichem Rauminhalt (Wie groß ist dieser?) entstehen.



35) Zeige, dass der Schwerpunkt des nebenstehend gefärbten Flächenstücks die Strecke PQ ziemlich genau im Verhältnis 47:151 teilt!

36) Gegeben sei eine Ellipse ell in erster Hauptlage mit dem Hauptscheitel $B(a/0)$ und dem Nebenscheitel $D(0/b)$. Die Diagonale BD des Vierecks $OBED$ [mit $E(a/b)$] begrenzt zusammen mit ell im ersten Quadranten ein Flächenstück. Zeige, dass der Schwerpunkt S dieses Flächenstücks auf der zweiten Diagonalen dieses Vierecks liegt.

37) Der Hochpunkt des Graphen Γ_f einer Polynomfunktion dritten Grades liegt auf der x-Achse. Wird der von der Hochpunkttangente t_H und Γ_f begrenzte Bereich um t_H gedreht, so entsteht ein Rotationskörper. In welchem Verhältnis teilt sein Körperschwerpunkt die Körperhöhe?

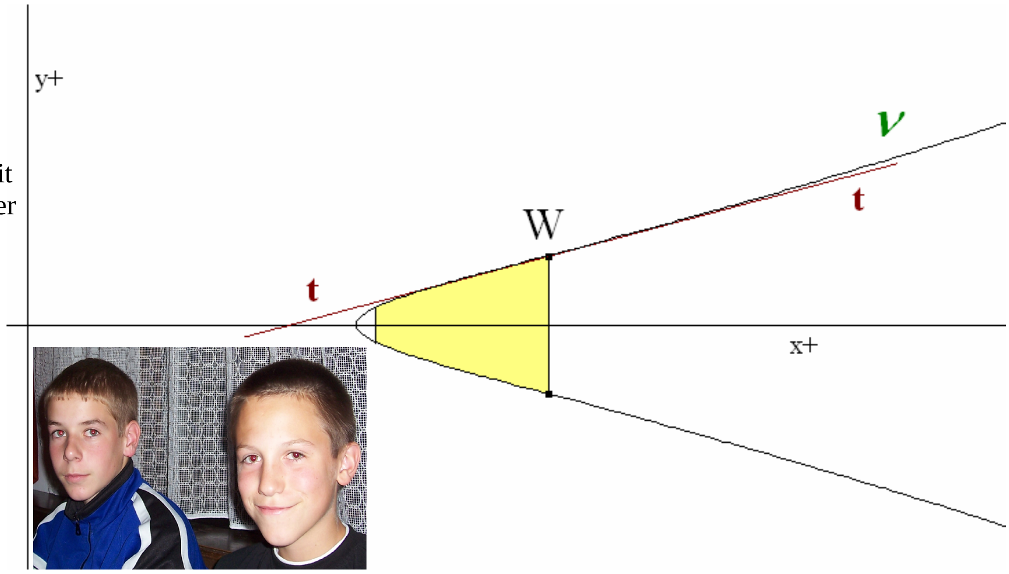
38) Der Graph Γ_f einer Polynomfunktion vierten Grades f besitze einen Wendepunkt W_1 mit horizontaler Wendetangente t_{W_1}.
Rotiert das von Γ_f und t_{W_1} begrenzte Flächenstück um t_{W_1}, so entsteht ein Drehkörper. In welchem Verhältnis teilt dessen Körperschwerpunkt die Körperhöhe?

39) Nebenstehend ist die Kubik ν mit der Gleichung ν: $y^2 = x^3 - 432$ zusammen mit ihren Wendepunkten und einer Wendetangente t abgebildet.

a) Berechne die Koordinaten von W!

b) Weise die Oskulation zwischen ν und t nach!

c) Berechne die kleinste natürliche Zahl n, für welche es einen reellen Kurvenpunkt auf ν mit der x-Koordinate n gibt.



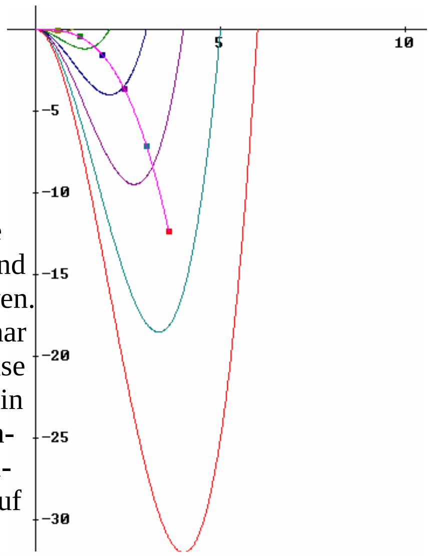
d) Rotiert ν (und damit der gefärbte Bereich) im Intervall $[n;x_W]$ um die x-Achse, so entsteht ein Drehkörper. Manu behauptet selbstsicher (siehe Foto darüber!), dass der Schwerpunkt dieses Körpers die Körperhöhe im Verhältnis 2:1 teilt. Ali teilt diese Meinung nicht mit Manu. Was ist denn nun wirklich der Fall?

40) Gegeben sind die Funktionen f und g mit den Funktionsgleichungen $f(x) = x^3 - 1$ und $g(x) = x^3 - x^2$.

(a) Diskutiere beide Funktionen, berechne die Koordinaten ihrer Schnittpunkte und zeichne beide Funktionsgraphen in einem Schaubild.

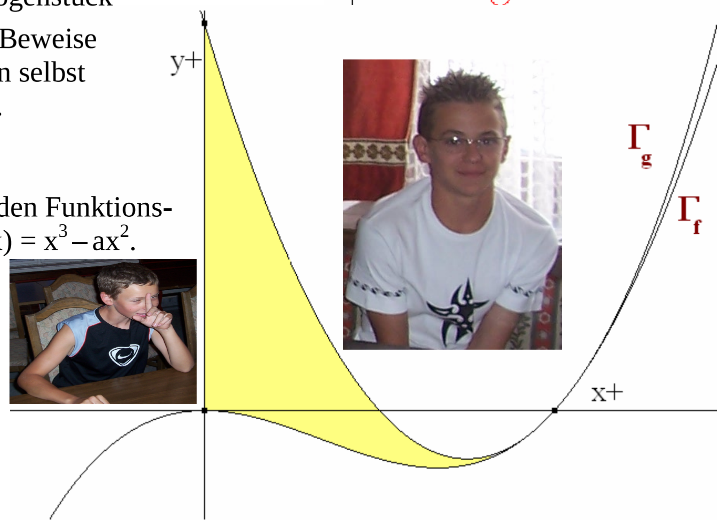
(b) Berechne den Inhalt sowie die Lage des Schwerpunktes S jenes Flächenstücks, welches die Graphen von f und g miteinander begrenzen.

41) In nebenstehender Abbildung sind einige Vertreter der Kurvenschar mit der Schargleichung $y = x^3 - tx^2$ (Scharparameter t) abgebildet, und zwar jene den Werten 1, 2, 3, 4 und 5 entsprechenden Kurven. Jede Kurve aus der Schar begrenzt mit der x-Achse ein Flächenstück. Die (in der Abbildung auch eingezeichneten) zugehörigen Flächenschwerpunkte liegen dann wieder auf einer Kurve, und zwar auf jener mit der Gleichung $y = \left(-\frac{50}{189}\right) \cdot x^3$ (Ein Bogenstück davon ist ebenso in der Abbildung zu finden!). Beweise dies oder/und(!) verifiziere diesen Satz für einen selbst gewählten Wert für t [oder/und(!!) wähle t=35].



42) Gegeben sind die Polynomfunktionen f und g mit den Funktionsgleichungen $y = f(x) = 2ax^2 - 3a^2x + a^3$ und $y = g(x) = x^3 - ax^2$.

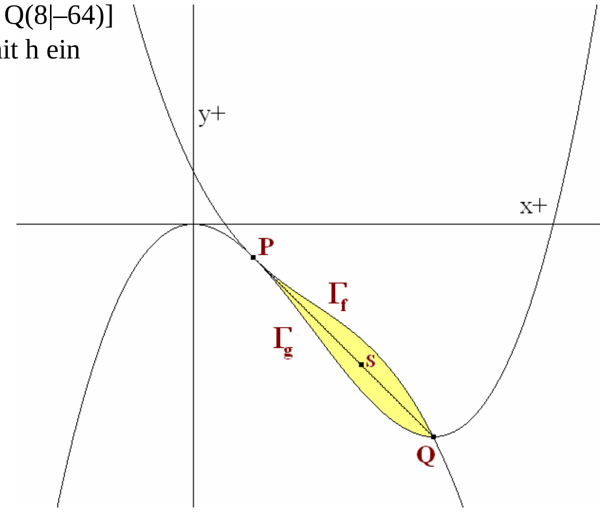
a) Zeige, dass Γ_f und Γ_g einander in ihrer gemeinsamen Nullstelle oskulieren (vgl. nebenstehende Abbildung!).



b) Tommy (der im ersten Quadranten wirkt, als wäre er nie und nimmer dazu in der Lage, aufbrausend zu sein! ☺) errechnet für die Lage des Schwerpunkts S des von der y-Achse, Γ_f und Γ_g begrenzten (in der Abbildung gefärbten) Bereichs $S\left(\frac{a}{5}\middle|\frac{a^3}{4}\right)$.

Dave (der Tommy gegenüber im zweiten Quadranten schon kritische Haltung einnimmt!) sagt für eine der beiden Koordinaten aber etwas Anderes an und behält [da er (wieder!) in Hochform ist] tatsächlich Recht. Also: Wo hat sich unser ***Irr***licht ge***irr***t? ☺

43) Gemäß der angegebenen Skizze sind Γ_f und Γ_g Graphen zweier Polynomfunktionen dritten Grades f und g, welche die Gerade h[P(2|–10), Q(8|–64)] in P berühren und in Q schneiden, wobei sowohl Γ_f als auch Γ_g mit h ein Gebiet mit einem Flächeninhalt von 27 begrenzen.



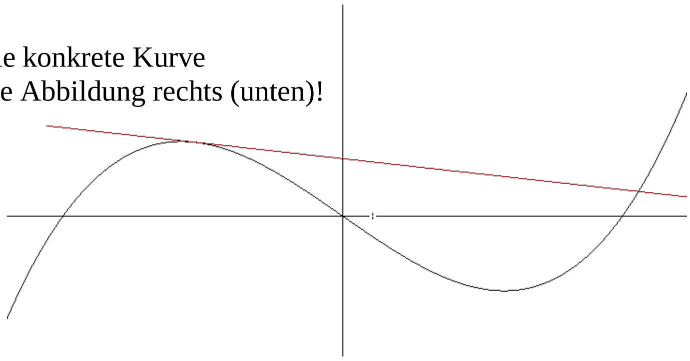
a) Ermittle die Funktionsgleichungen von f und g!

b) Zeige, dass der Schwerpunkt S des von Γ_f und Γ_g begrenzten (in der Skizze gefärbten) Gebiets auf der Strecke PQ liegt. In welchem Verhältnis teilt S die Länge der Strecke PQ?

44) Eine zur y-Achse symmetrische nach unten geöffnete Parabel begrenzt mit den positiven Koordinatenachsen ein Gebiet, welches bei Rotation um die x-Achse einen Drehkörper erzeugt. In welchem Verhältnis teilt dessen Schwerpunkt die Körperhöhe?

45) **SATZ.** Legt man in einem Punkt der Kurve c mit der Gleichung $c\colon y = ax^3 + bx$ die Tangente, so begrenzt diese mit der Kurve ein Gebiet, dessen Schwerpunkt auf der Kurve ν mit der Gleichung $\nu : y = \frac{625a}{112} \cdot x^3 + bx$ liegt.

Beweise diesen Satz oder/und(!) verifiziere ihn für die konkrete Kurve c[c: $y = 7x^3 - 625x$] anhand des Punkts $P(-5|y_P)$, siehe Abbildung rechts (unten)!



Gutes Gelingen beim Lösen dieser schönen Aufgaben!

Wien, im September 2008. Dr. Robert Resel, e. h.

Lösungen zu ausgewählten abschließenden Übungsbeispielen (INTEGRALRECHNUNG)

8C, Realgymnasium, 2008/09

1) b) $A_{\text{Schleife}} = \frac{972}{5}$, $A_{\text{Quadrat}} = 392$, daher $A_{\text{Schleife}} : A_{\text{Quadrat}} = 243 : 490$

c) $V_{\text{Tropfen}} = \frac{6561\pi}{16}$, $V_{\text{Doppelkegel}} = \frac{5488\pi}{3}$, daher $V_{\text{Tropfen}} : V_{\text{Doppelkegel}} = \frac{19683}{87808} = \frac{3^9}{2^8 \cdot 7^3}$

2) a) $H\left(-4\middle|240\sqrt{3}\right)$, $T\left(-4\middle|-240\sqrt{3}\right)$, $W_1\left(-8\middle|160\right)$, $W_2\left(-8\middle|-160\right)$

b) $P\left(-2\middle|320\right)$, $S\left(-\frac{21}{5}\middle|540\right)$, $A_{\text{roter Bereich}} = \frac{1532}{7}$

3) d) 15

4) par.: $y^2 = -\frac{1}{4}x^2+2$, $V = \frac{3\pi+34}{20}\,\text{cm}^3$, also ca. 5g pro Glas, Höhe 4cm, Breite $2 \cdot \left(\sqrt{2}+1\right) \approx 4{,}83\,\text{cm}$

5) b) $\boldsymbol{F2} = 57600$; $\boldsymbol{F1} = \boldsymbol{F3} = 43200 \rightarrow \boldsymbol{F1} : \boldsymbol{F2} : \boldsymbol{F3} = 43200:57600:43200 = 3:4:3$

c) $P\left(45 \middle| 675\sqrt{7}\right)$; Fast! Exakter (Ersatz-)Wert für b: $\sqrt[3]{\frac{7}{17}}$

6) a) $H(a|3\sqrt{3}\,a^4)$, $W(a\sqrt{3}\,|\sqrt{3}\,a^4)$, $S(a\sqrt{2}\,|4a^4)$

b) beide $\frac{32a^5}{5}$

7) a) 3:5, $\mathcal{F} = \frac{(b-a)^3}{12}$, $F_{\text{größtes Rechteck}} = \frac{(b-a)^3}{32}$

b) 256:369, $V(\mathcal{D}_x) = \frac{(b-a)^5 \pi}{80}$, $V_{\text{größter Zylinder}} = \frac{16(b-a)^5 \pi}{3125}$

c) Der Zylinder ist weniger hoch als das Rechteck lang, dafür breiter!

8) a) $k : y = \frac{256}{x^8}$

b) $\frac{14}{17}$

9) a) $V = \frac{r^2 \pi h}{4}$

10) Volumsverhältnis 8:9; 1:2, wobei S der Schnabelspitze näher liegt!

11) exaktes Volumsverhältnis $\frac{128\sqrt{3}}{1215}$

12) exaktes Volumsverhältnis $\frac{512\sqrt{3}}{1215}$

13) exaktes Volumsverhältnis $\frac{19683}{32768} = \frac{3^9}{2^{15}}$

15) a) $h^4 y^2 = d^2 x^2 \cdot (h^2 - x^2)$, b) $V = \frac{2\pi}{15} \cdot d^2 \cdot h$ d) $R\left(\frac{3h}{5} \middle| -\frac{12d}{25}\right)$, e) $d : h = \frac{5\sqrt{14}}{7}$ bzw. $h : d = \frac{\sqrt{14}}{10}$

16) a) P(6|6)

b) M(14|0), r=10

c) Kugelkalotte: h=2, $V = \frac{68\pi}{3}$, m=3062

17) u=88

18) u=190

19) b) exakter Umfang: $\left(8\sqrt{2} - 4 + \pi\sqrt{2}\right) \cdot t$, u≈435 für t=37

c) exakter Flächeninhalt: $\left(\frac{44}{5} - 2\pi\right) \cdot t^2$, u≈1573 für t=25

20) b) L=122

22) M=2072π, O=4128π

23) a) $16h^3 y^2 = 27d^2 x^2 \cdot (x + h)$

24) b) $d_1=33$, $d_2=44$, c) M≈17106

25) Wegen a≈85 ist dieser Körper somit 170cm hoch und 113,33cm breit. Je nach derzeitigem Wachstumsstand der jungen Brüder von Ali G. und Manu könnten sie evtl. knapp an die Höhe des Körpers herankommen! ☺

26) $\boldsymbol{M} = \frac{1056\pi}{5}$

29) Tipp: Wegen der in nebenstehendem Kästchen [Übungsaufgabe 6 der 5E(2007/08) zum Kapitel "Funktionen", kann auch in der achten Klasse zum Üben nicht schaden! ☺] erläuterten Eigenschaft der Parabeltangente (Anm.: Dies war bei der "Kegelschnitts-Schularbeit" der 7B im Jänner 2008 an einem konkreten Beispiel zu verifizieren!) ist der Ansatz P(½·h|r) für die Parabel zu empfehlen! Zwischenresultat für M: $\boxed{M = \frac{2r\pi}{3h^2} \cdot \left(s^3 - r^3\right)}$, dann raus mit dem h (Regel von HORNER!) usw.

> 6) Beweise folgende Tangentenkonstruktion für Parabeln (hier: für **Norm**parabeln!): Projiziert man den Berührungspunkt T auf die Symmetrieachse der Parabel und spiegelt diesen Punkt T′ am Scheitel S der Parabel, so erzeugen der gespiegelte Punkt T′′ und T die Tangente an die Parabel in T. (Wähle o.B.d.A. $y = x^2$!)

30) a) a=1
b) $M = \frac{68485824\pi}{9765625}$, $F = \frac{60466176\pi}{9765625}$, dann kürzen (Teilbarkeitsregeln 2. Klasse!)

31) Stimmt!

32) Lsg. $\frac{\pi}{15}$ statt $\frac{1}{\pi}$!

34) b) a=32, b=2, c) F(3|–27), G(3|27), d) A =216, S(3|0), e1)1:1

35) $S\left(\frac{2r}{3\cdot(4-\pi)}\middle|\frac{2r}{3\cdot(4-\pi)}\right)$

36) Benutze die Formel für den Flächeninhalt einer Ellipse ohne Beweis, bestätige $S\left(\frac{2a}{3(\pi-2)}\middle|\frac{2b}{3(\pi-2)}\right)$ und folgere daraus $S \in g_{OE}$!

37) 5:3, Ansatz: $y=f(x)=x^3(x-a)$, dann gilt: $S\left(\frac{5a}{8}\middle|0\middle|0\right)$

38) 7:3, Ansatz: $y=f(x)=x^4(x-a)$, dann gilt: $S\left(\frac{7a}{10}\middle|0\middle|0\right)$

39) a) W(12|36), b) … führt auf einen vollständigen Kubus!
c) $n = \left\lfloor\sqrt[3]{432}\right\rfloor + 1 = 8$, wobei [a] die nächstkleinere ganze Zahl kleiner (oder gleich) a bezeichnet
d) Ganz genau erfolgt die Teilung wegen $S\left(\frac{1013}{95}\middle|0\middle|0\right)$ im Verhältnis 253:127!

40) a) f: S(0|–1), N(1|0), streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$
g: $H=N_1=N_2(0|0)$, $T\left(\frac{2}{3}\middle|-\frac{4}{27}\right)$, $W\left(\frac{1}{3}\middle|-\frac{2}{27}\right)$, N_3=N von f
$\Gamma_f \cap \Gamma_g = \left\{S_1\left(-1\middle|-2\right), N\right\}$
b) $A = \frac{4}{3}$, $S\left(0\middle|-\frac{3}{5}\right)$

42) a) vollständiger Kubus!!
b) ξ stimmt, η hat unser Irrlicht knapp verfehlt! Es gilt $\eta = \frac{26a^3}{105}$. Offensichtlich hat Tommy im Sinne des positiven Denkens den Fünfer im Nenner un(ter)bewusst durch einen Vierer ersetzt und dann "richtig falsch" gekürzt!

43) a) $y = f(x) = \frac{1}{4}\cdot\left(-x^3 + 12x^2 - 72x + 64\right)$, $y = g(x) = \frac{1}{4}\cdot\left(x^3 - 12x^2\right)$
b) $S\left(\frac{28}{5}\middle|-\frac{212}{5}\right) \Rightarrow \overline{PS} : \overline{SQ} = 3:2$

44) 5:11

45) $t_P \cap c = \{P^{(2)}$(sic!), Q(10|750)$\}$, S(4|0)