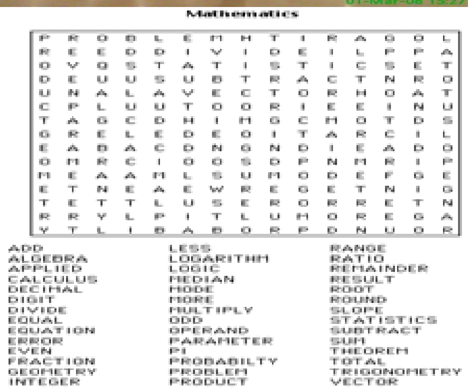
Übungsbeispiele sowohl für die dreistündige Schularbeit als auch die schriftliche Matura

(8C, Realgymnasium, 2008/09)

Diese Beispiele sollen durch die sowohl für die dreistündige Schularbeit als auch die schriftliche Matura relevanten Stoffgebiete führen, wobei an dieser Stelle mit der **Integralrechnung** *ein (wenn nicht überhaupt* ***das*** *zentrale) Kapitel der 8. Klasse exemplarisch nochmals aufgerollt wird, und zwar anhand von Aufgaben, deren "Bausteine" geradezu charakteristisch für* ***Maturabeispiele*** *sind.*

ACHTUNG! Ein bloßes "Auswendiglernen" der Beispiele ist sicher keine ausreichende Matura- resp. Schularbeitsvorbereitung, da du deine erworbenen Kenntnisse sowohl bei der dreistündigen Schularbeit als auch bei der schriftlichen Matura auf Problemstellungen anzuwenden hast, die zwar nicht gänzlich neuartig, aber zum Teil in der Form wie bei der dreistündigen Schularbeit resp. der schriftlichen Matura gestellt in dieser Aufgabensammlung nicht enthalten sind! Ein eigenständiges Lösen dieser Aufgaben (bis auf jene, die wir in diversen Schulübungen gemeinsam bearbeiten werden) ist eine absolute Notwendigkeit für ein angemessenes Übungsprogramm!



1) Gegeben ist der NEWTONsche ν Knoten mit der Gleichung ν: $108y^2 = x^2\cdot(x+27)$.

   a) Zeige, dass die beiden Doppelpunkttangenten einander rechtwinklig schneiden.

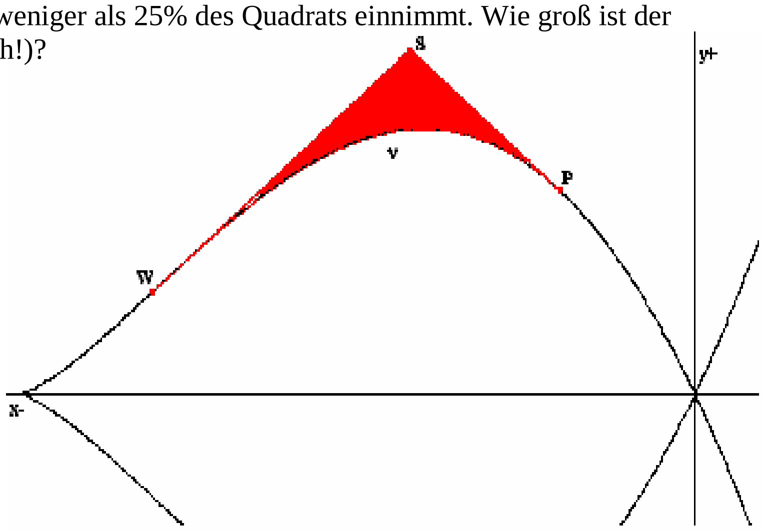
   b) Wegen a) kann der Schleife von ν ein Quadrat berührend umschrieben werden. Zeige, dass die Schleife von ν weniger als 50% des Quadrats einnimmt. Wie groß ist der relative Flächenanteil exakt (gekürzter Bruch!)?

   c) Rotieren Quadrat und Schleife um die x-Achse, so entstehen zwei Drehkörper in Form eines Doppelkegels und eines Tropfens. Zeige, dass der Tropfen weniger als 25% des Quadrats einnimmt. Wie groß ist der relative Volumenanteil exakt (gekürzter Bruch!)?

2) Gegeben ist die algebraische Kurve ν mit der Gleichung ν: $y^2 = 50x^2\cdot(x+10)^3$ ("Quintik", siehe auch nebenstehende Abbildung!).

   a) Berechne die Koordinaten der Extrem- und Wendepunkte. Zeichne sie in der Skizze ein!

   b) Stelle eine Gleichungen der Wendetangenten sowie jener zur fallenden Wendetangente parallele Kurventangente (Berührungspunkt P) auf und berechne den Flächeninhalt des gefärbten Bereichs!



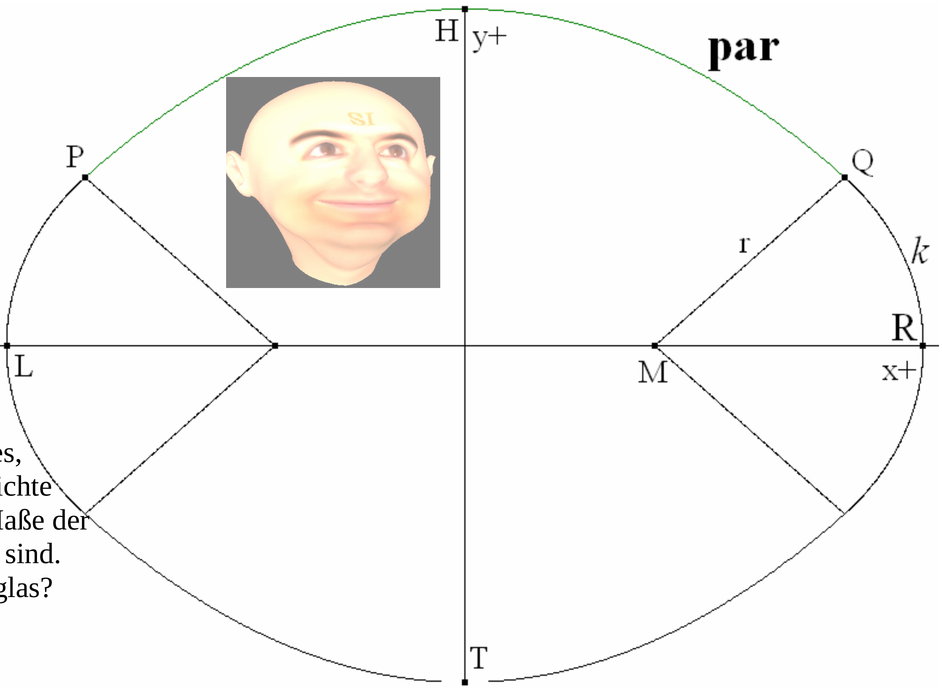
3) Die Kurve c mit der Gleichung c: $144y^2 = x^2 \cdot (144 - x^2)$ hat die Gestalt eines liegenden Achters.

a) Zeige, dass die Doppelpunkttangenten einander rechtwinklig schneiden!

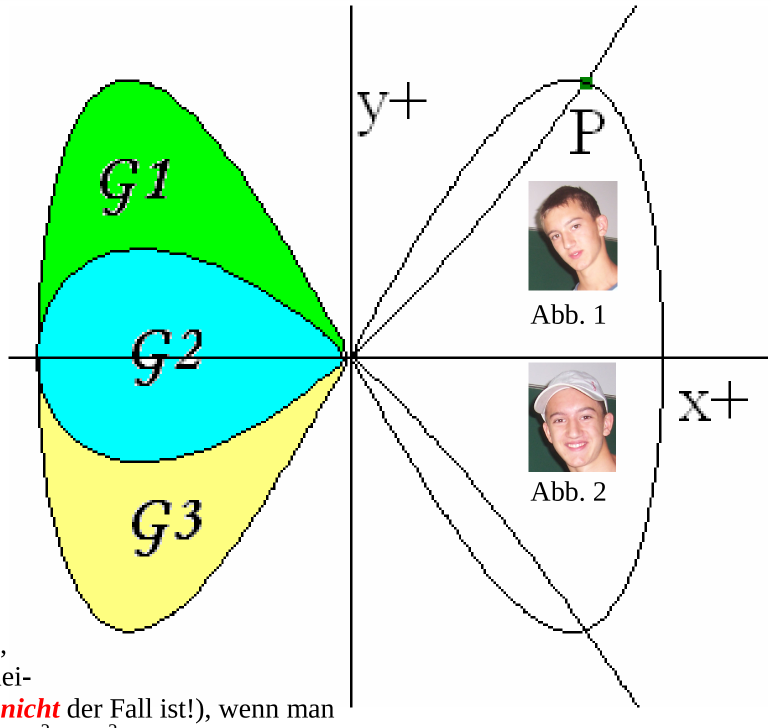
b) Ermittle Gleichungen der zu den Doppelpunkttangenten parallelen Tangenten t_1 und t_2 an die rechte Schleife von c.

c) T sei einer der Berührungspunkte von t_1 oder t_2 mit c, T´ dessen Normalprojektion auf die x-Achse, D der Doppelpunkt von c sowie S der Schnittpunkt von t_1 und t_2.
Verifiziere am konkreten Beispiel die allgemeingültige Proportion $\overline{DT'} : \overline{T'S} = 2:1$!

d) Berechne den Flächeninhalt jenes Bereichs, welchen t_1 und t_2 mit c begrenzen.



4) Für einen "big face man" (siehe Abbildung rechts!) wird eine Spezialbrille entworfen, welche im angegebenben Koordinatensystem in jedem Quadranten aus einem Parabelbogen und einem Achtelkreisbogen besteht, wobei wir uns auf den ersten Quadranten konzentrieren, wo par in Q(2|1) tangentiell in den Viertelkreisbogen übergeht. Berechne die Masse eines solchen 1,5mm dicken Glases, wenn das verwendete Glas eine Dichte von 2,3kg/dm^3 aufweist und die Maße der Abbildung in (sic!) cm angegeben sind. Wie hoch und breit ist das Brillenglas?



5) In nebenstehender Abbildung sind ein NEWTON-Knoten k_1 sowie eine LISSAJOUS-Kurve k_2 eingezeichnet, ***deren Schleifen offensichtlich gleich breit sind***.

a) Begründe ***dies*** anhand der Kurvengleichungen $y^2 = x^2(3600 - x^2)$ und $y^2 = 15x^2(x+60)$ und ordne die jeweilige Gleichung der entsprechenden Kurve zu (Begründungen angeben!).

b) Stimmt Emmys (Abb. 1) Behauptung, dass die Flächeninhalte ***F1***, ***F2*** und ***F3*** der Gebiete ***G1***, ***G2*** und ***G3*** der fortlaufenden Proportion ***F1*** : ***F2*** : ***F3*** = 3:4:3 genügen?

c) Wie steht es mit Emmys (Abb. 2) Behauptung, dass k_1 und k_2 einander in P rechtwinklig schneiden ***würden*** (Prüfe nach, dass dies momentan ***nicht*** der Fall ist!), wenn man in den Schargleichungen $y^2 = x^2(16b^2 - x^2)$ und $y^2 = bx^2(x+4b)$ anstelle jenes Werts für b, welcher die obigen konkreten Kurven liefert (Wie groß ist dieses b eigentlich?[1]), den Wert $b = \frac{154}{207}$ einsetzt (Beachte: Mit Kapperl ist unsere Klassenente – siehe Abb.2! – vielleicht schon wieder zu lustig und abgelenkt ..... ☺)?

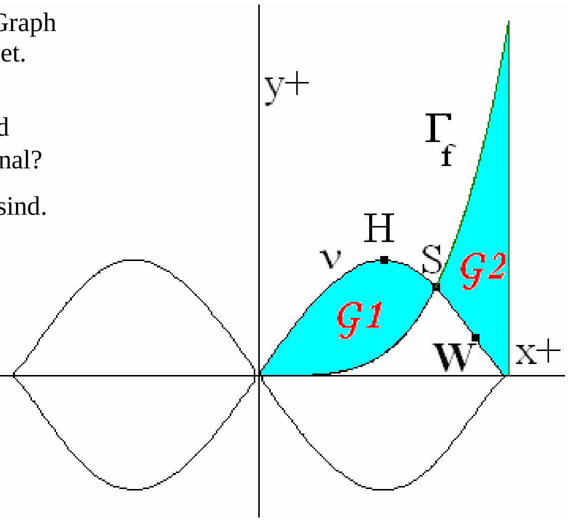
---

[1]: Bem.: Erst durch derartige [von deinem matheprof(.at) höchstpersönlich erstellte!] Parametrisierungen kommen Aufgaben mit "schönen Lösungen" zustande!

6) In nebenstehender Figur sind die Kurve ν[ν: $y^2 = x^2 \cdot (4a^2 - x^2)^3$] und der Graph der Potenzfunktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = x^4$ abgebildet.

a) Berechne die Koordinaten des Hochpunkts H und des Wendepunkts W von ν im ersten Quadranten sowie des Schnittpunkts S von Γ_f und ν. Für welchen Wert des Parameters a erfolgt dieser Schnitt orthogonal?

b) Zeige, dass die Flächeninhalte der Gebiete ***G1*** und ***G2*** gleich groß sind.



7) Betrachte das von den Parabeln k_1 und k_2 mit den Gleichungen $k_1 : y = (x-a)^2$ und $k_2 : y = (x-b)^2$ (wobei $0 < a < b$ vorausgesetzt wird) und der x–Achse begrenzte Flächenstück $\mathcal{F}$ sowie den bei Rotation von $\mathcal{F}$ um die x–Achse entstehenden Drehkörper $\mathcal{D}_x$ und bearbeite die folgenden Aufgaben:

(a) In welchem Verhältnis teilt das $\mathcal{F}$ eingeschriebene flächeninhaltsgrößte Rechteck (von dem eine Seite auf der x–Achse liegt) den Flächeninhalt von $\mathcal{F}$?

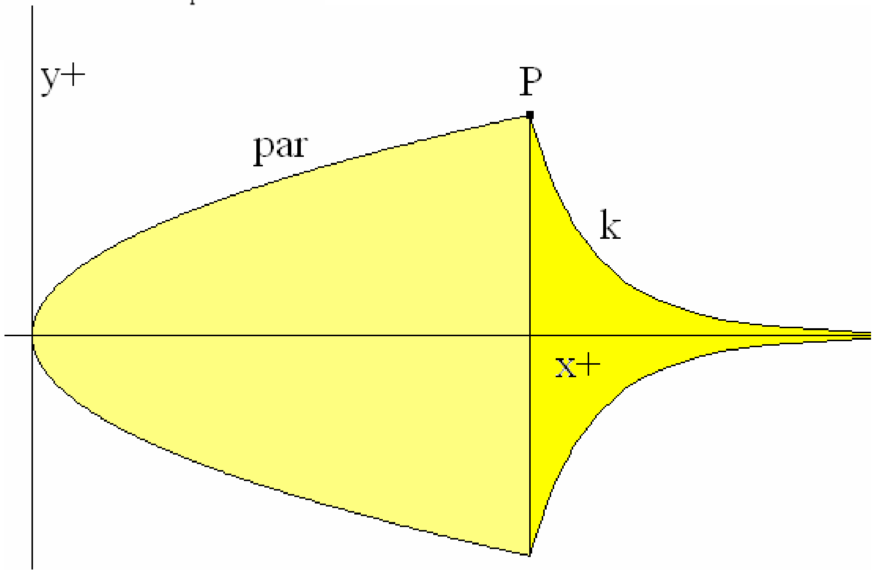
(b) Schreibe $\mathcal{D}_x$ den volumsgrößten koaxialen Drehzylinder ein. In welchem Verhältnis teilt dieser das Volumen von $\mathcal{D}_x$?

(c) Vergleiche Deine in (a) und (b) erhaltenen Resultate und interpretiere das Resultat dieses Vergleichs!

8) Durch den Punkt $P(x_P|1)$ der Parabel par[par: $2y^2 = x$] wird eine Kurve k mit der Gleichung k: $y = a \cdot x^{-8}$ gelegt.

a) Berechne a und zeige, dass par und k einander in P orthogonal schneiden..

b) Das markierte Gebiet bildet den Meridianschnitt eines unendlichen Pilzes, welcher bei Rotation des Gebiets um die x-Achse entsteht. Welchen Bruchteil des Gebiets nimmt das doppelte Parabelsegment ein?



9) Eine durch den Punkt P(h|r) gehende NEILsche Kurve ν [ν: $y^2 = ax^3$] rotiert im Intervall [0;h] um die x-Achse und erzeugt auf diese Weise einen hornförmigen Drehkörper mit dem Radius r und der Höhe h (vgl. Abbildung rechts!).

a) Leite eine Volumsformel für diesen Drehkörper her!

b) Schreibe diesem Körper den volumsgrößten koaxialen Drehkegel ein, dessen Spitze im Basiskreis des Horns liegt (Nachweis des Maximums!) und zeige, dass die Volumina von Horn und Kegel sich wie 64:9 verhalten.

10) Rotiert eine NEILsche Kurve durch (0|0) und (h|r) über [0;h] um die x-Achse, so entsteht ein hornförmiger Drehkörper. Diesem wird ein koaxialer Drehkegel einbeschrieben, welcher den hornförmigen Drehkörper längs seines Basiskreises berührt. In welchem Verhältnis stehen die Volumina der beiden Körper und in welchem Verhältnis teilt die Kegelspitze die Körperhöhe des hornförmigen Drehkörpers?

11) Die Kurve ν mit der Gleichung $\nu\!: 3a^2y^2 = x^2\cdot(a^2 - x^2)$ hat die Gestalt eines liegenden Achters mit einem Doppelpunkt im Ursprung.

a) Zeige, dass die Tangenten an ν in den Punkten $P\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\middle|y_P > 0\right)$ und $Q\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\middle|y_Q < 0\right)$ mit der y-Achse ein gleichseitiges Dreieck bilden.

b) Rotiert das Dreieck aus a) sowie die rechte Schleife von ν um die x-Achse, so entsteht ein gleichseitiger Drehkegel bzw. ein Tropfen. Ermittle das Verhältnis der beiden Volumina und nimm zu Mad Mikes Resultat 52:285 Stellung!

12) Die Kurve ν mit der Gleichung $\nu\!: a^2y^2 = x^2\cdot(a^2 - x^2)$ hat die Gestalt eines liegenden Achters mit einem Doppelpunkt im Ursprung.

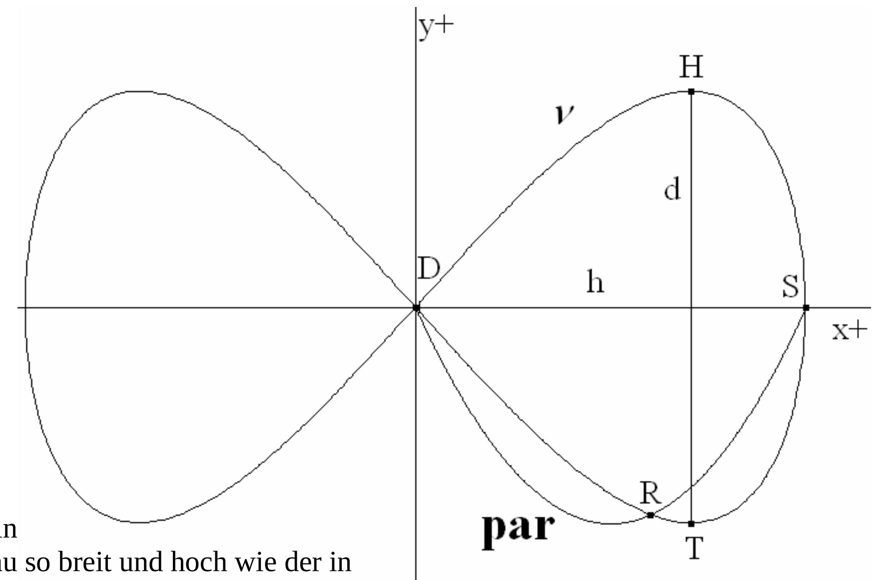
a) Zeige, dass die Doppelpunkttangenten von ν einander rechtwinklig schneiden.

b) Wegen a) kann der rechten Schleife von ν ein Quadrat berührend umschrieben werden. Rotieren das Quadrat und die rechte Schleife von ν um die x-Achse, so entsteht ein Doppelkegel und ein Tropfen. Ermittle das Verhältnis der beiden Volumina und nimm zu Mad Mikes Resultat 127:174 Stellung!

13) Gegeben ist der NEWTONsche Knoten ν mit der Gleichung $\nu\!: y^2 = b^2x^2\cdot(x+a)$. Die zu den Doppelpunkttangenten parallelen Kurventangenten begrenzen mit den Doppelpunkttangenten eine Raute. Rotieren die Raute und die Schleife von ν um die x-Achse, so entstehen ein Doppelkegel und ein tropfenförmiger Drehkörper. Ermittle das Verhältnis der beiden Volumina und nimm zu Mad Mikes Aussage, dass der Tropfen 60% des Doppelkegels einnimmt, Stellung!

14) Die durch den Punkt P(r|h) verlaufende Parabel par in erster Hauptlage erzeugt bei Rotation um die x-Achse im Intervall [0;h] eine Paraboloidkalotte der Höhe h mit dem Radius r. Durch P verlaufen aber auch unendlich viele NEWTONsche Knoten mit Gleichungen der Form $y^2 = ax^2(x+b)$, wobei a und b positive reelle Zahlen sind. Rotiert solch ein NEWTONscher Knoten im Intervall [0;h] ebenso um die x-Achse, so höhlt er die oben genannte Kalotte aus. Beweise, dass diese Aushöhlung immer zwischen ½ und $\frac{2}{3}$ des Kalottenvolumens beträgt.

15) a) Drücke die Parameter a und b in der Gleichung $\nu\!: a^2y^2 = x^2\cdot(b^2 - x^2)$ derart durch d und h aus, dass sich jene (rechts abgebildete!) LISSAJOUS-Kurve ν ergibt, welche bei Rotation ihrer rechten Schleife um die x-Achse einen Drehkörper der Höhe h ($h = \overline{DS}$) mit dem maximalen Querschnittsdurchmesser ($d = \overline{HT}$) erzeugt.



b) Rotiert die Parabel par (siehe Abbildung rechts!) mit der Gleichung par.: $y = \frac{2d}{h^2}\cdot\left(x^2 - hx\right)$ im Intervall [0;h] um die x-Achse, so entsteht ein Drehkörper, welcher nicht nur genau so breit und hoch wie der in a) genannte Körper ist, sondern sogar exakt das gleiche Volumen aufweist. Beweise dies!

c) Zeige, dass sich die Steigungen der Parabel und des Bogens von ν im 4. Quadranten in D wie 2:1 verhalten

d) Berechne die Koordinaten des dritten gemeinsamen Punkts R von ν und par im 4. Quadranten.

e) Für welches Verhältnis d:h bzw. h:d schneiden ν und par einander in R rechtwinklig?

16) Betrachte den NEWTONschen Knoten ν mit der Gleichung ν: $9y^2 = x^2\cdot(x+3)$ und jene Gerade g, welche durch den am weitesten links liegenden Punkt S sowie den höchsten Punkt H der Schleife von ν geht.

a) Berechne die Koordinaten des dritten gemeinsamen Punkts $P(x_P|y_P)$ von g und ν und kontrolliere, dass die Doppeltangenten von ν einander unter zwei Winkeln schneiden, deren Maße sich wie 2:1 verhalten.

b) Durch P geht genau ein Kreis k, welcher ν in P berührt und auf der x-Achse zentriert ist. Verifiziere für den Radius r von k die für NEWTONsche Knoten mit Gleichungen der Bauart $3ay^2 = x^2\cdot(x+a)$ allgemeingültige nebenstehende Formel. $\boxed{r = \frac{x_P^2}{2a} + \frac{2x_P}{3}}$

c) Das von k und ν begrenzte Flächenstück erzeugt bei Rotation um seine Symmetrieachse einen Drehkörper, welcher aus einem Material mit der Dichte $\rho = 43$kg/VE erzeugt wird. Berechne die Masse dieses Körpers!

17) Die NEILsche Kurve mit der Gleichung $108y^2 = (x+27)^3$ begrenzt mit der y-Achse ein Flächenstück, dessen Umfang zu berechnen ist.

18) Die NEILsche Kurve mit der Gleichung $675y^2 = 64(x+27)^3$ begrenzt mit der y-Achse ein Flächenstück, dessen Umfang zu berechnen ist.

19) Die NEILsche Kurve ν mit der Gleichung $\boxed{\nu\colon 27ty^2 = 4(x+3t)^3,\ t>0}$ wird in ihren Schnittpunkten mit der y-Achse von einem (auf der x-Achse zentrierten) Kreis k berührt.


Abbildung R_1

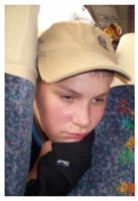
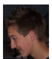


Abbildung R_2


Abbildung R_3

a) Zeige, dass das von k und ν begrenzte Gebiet nebst zweier kongruenter Kurvenbögen von ν aus einem Viertelkreisbogen von k besteht!



b) Berechne den Umfang des in a) genannten Gebiets (*Wurzelausdrücke und π, keine Dezimalzahlen verwenden!*)! Roli hat die *geklammerte Anweisung* vergessen (siehe Abbildung R_1! … er war wohl schon etwas unkonzentriert … ☺) und erhält das Ergebnis $u = \frac{1352t}{115}$. Nimm Stellung zu seinem Resultat (… über dessen Richtigkeit er in Abbildung R_2 noch nachgedacht hat, bevor er in Abbildung R_3 von all den Integralen und Ableitungen erschöpft eingeschlafen ist …)! Für welchen Wert von t ergibt sich ziemlich genau ein Umfang von 435?

c) Roli (siehe Abbildung R_4!) ist wieder wach und hat den Flächeninhalt des von k und ν begrenzten Gebiets berechnet, sein Resultat lautet $u = \frac{224t^2}{89}$. Nimm analog zu b) Stellung zu diesem Ergebnis! Für welchen Wert von t ergibt sich ziemlich genau ein Flächeninhalt von 1573?

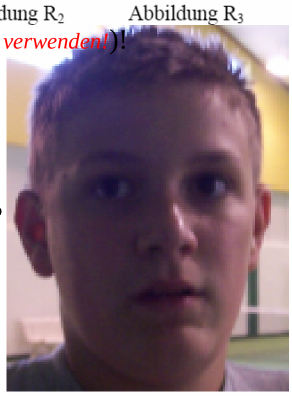


Abbildung R_4

20) Durch den Punkt P(a|b) verläuft genau eine NEILsche Kurve ν mit der Gleichung ν: $y^2 = c\cdot x^3$. Bezeichnet α den spitzen Winkel zwischen der x-Achse und der Gerade $g_{OQ}\left[O(0|0), Q\left(a\middle|\frac{3b}{2}\right)\right]$, so gilt der folgende

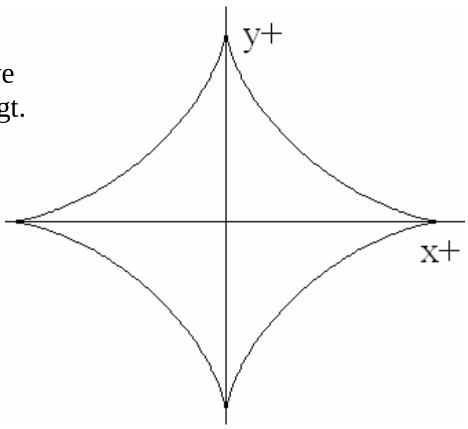
SATZ. Die Länge L des Kurvenbogens auf ν von O bis P beträgt $\boxed{L = b\cdot\frac{1-\cos^3\alpha}{\sin^3\alpha}}$.

Wähle a) oder/und(!) b)!

a) Beweise diesen Satz!

b) Verifiziere den Satz für den Punkt Q(108|81)!

21) Zeige, dass die Länge der nebenstehend abgebildeten Kurve ("ASTROIDE") mit der Gleichung $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ exakt 6a beträgt.

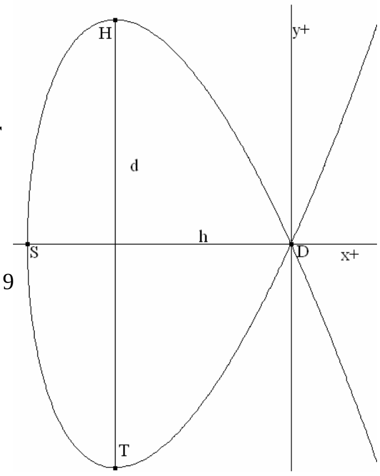


22) Rotiert die Kurve mit der Gleichung $8y^2 = 4x^4 + x^2$ im Intervall [0;8] um die x-Achse, so entsteht ein Drehkörper. Kontrolliere, dass der Oberflächeninhalt dieses Körpers ca. doppelt so groß ist als der Mantelflächeninhalt!

23) a) Drücke die Parameter a und b in der Gleichung ν: $ay^2 = x^2 \cdot (x+b)$ derart durch d und h aus, dass sich jener (rechts abgebildete!) NEWTONsche Knoten ergibt, welcher bei Rotation seiner Schleife um die x-Achse einen Drehkörper der Höhe h $\left(h = \overline{DS}\right)$ mit dem maximalen Querschnittsdurchmesser $\left(d = \overline{HT}\right)$ erzeugt.

a) Leite die Volumsformel $\boxed{V = \frac{9\pi}{64} \cdot d^2 \cdot h}$ für den in a) genannten Drehkörper her!

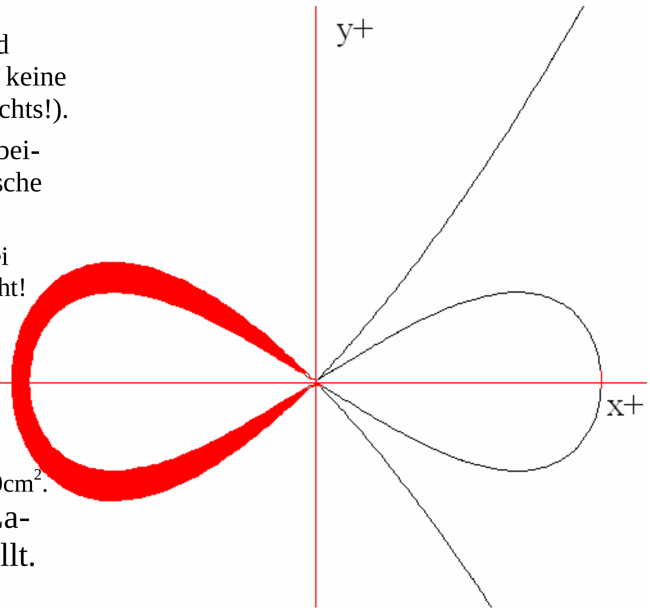
b) Zeige, dass der Mantelflächeninhalt M des in a) genannten Drehkörpers für das Verhältnis $d:h = 4:9$ exakt $\boxed{M = \frac{10\pi}{3} \cdot h^2}$ ergibt.

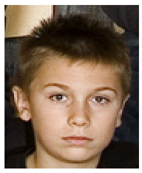


24) a) Zeige, dass die Kurven $k_1[k_1: 69696y^2 = x^2 \cdot (8712 - x^2)]$ und $k_2[k_2: 297y^2 = x^2 \cdot (x+99)]$ nebst dem Koordinatenursprung keine weiteren gemeinsamen Punkten haben (vgl. Abbildung rechts!).

b) Überprüfe, dass die Drehkörper, welche bei Rotation der beiden Kurven für x<0 um die x-Achse entstehen, konzentrische Gürtelkreise aufweisen und berechne deren Durchmesser.

c) Berechne den Mantelflächeninhalt jenes Drehkörpers, der bei Rotation des gefärbten Flächenstücks um die x-Achse entsteht!



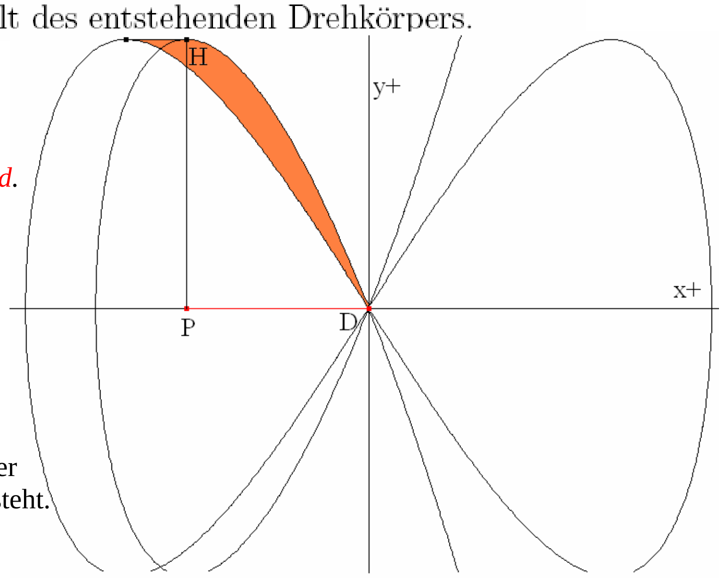
25) Der NEWTONsche Knoten $\nu[\nu: 9ay^2 = x^2 \cdot (x+3a)]$ hat im Ursprung einen Doppelpunkt D und im zweiten Quadranten einen Hochpunkt H. Rotiert der Bogen $\overset{\frown}{DH}$ um die x-Achse, so entsteht ein Drehkörper mit einem **Ober**flächeninhalt von 50440cm^2.
Jetzt wird dieser Drehkörper aus der horizontalen Lage in vertikale Lage gebracht, also m.a.W. aufgestellt. Wenn man Danny G. und den jungen MexiKana nun daneben  hinstellt, wer  oder was überragt denn dann wen oder was? ☺

26) Die Kurve mit der Gleichung $(y^2 - 36)^3 = 729x^4$ rotiert im Intervall $[0; 8]$ um die $x-$Achse. Berechne den Mantelflächeninhalt des entstehenden Drehkörpers.

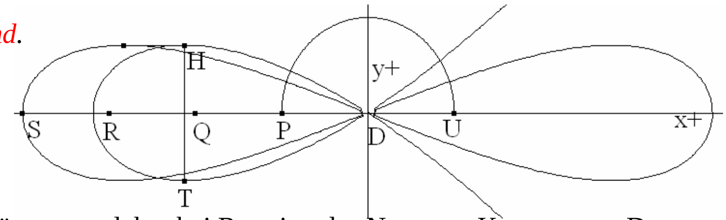
27) In nebenstehender Abbildung sind ein NEWTON-Knoten k_1 sowie eine LISSAJOUS-Kurve k_2 eingezeichnet, *deren Schleifen offensichtlich gleich hoch sind*.

a) Begründe *dies* anhand der Kurvengleichungen $1024a^2y^2 = x^2(128a^2 - x^2)$ und $27ay^2 = x^2(x+9a)$ und ordne die jeweilige Gleichung der entsprechenden Kurve zu (Begründungen angeben!).

b) Beweise, dass der Mantelflächeninhalt jenes Drehkörpers, welcher bei Rotation der gefärbten Fläche um die x-Achse entsteht, genau so groß ist als der Flächeninhalt jenes Kreises, welcher bei Rotation der Strecke DP (siehe Abbildung!) um die y-Achse entsteht.



28) In nebenstehender Abbildung sind ein NEWTON-Knoten k_1 sowie eine LISSAJOUS-Kurve k_2 eingezeichnet, *deren Schleifen offensichtlich gleich hoch sind*.



a) Begründe *dies* anhand der Kurvengleichungen $1024a^2y^2 = x^2(128a^2 - x^2)$ und $27ay^2 = x^2(x+9a)$ und ordne die jeweilige Gleichung der entsprechenden Kurve zu (Begründungen angeben!).

b) Beweise, dass der Mantelflächeninhalt jenes Drehkörpers, welcher bei Rotation des NEWTON-Knotens von D bis H um die x-Achse entsteht, genau so groß ist als der Mantelflächeninhalt der Kugel mit dem Durchmesser HT.

c) Beweise, dass der Oberflächeninhalt jenes Drehkörpers, welcher bei Rotation der LISSAJOUS-Kurve von D bis zu deren Hochpunkt H um die x-Achse entsteht, genau so groß ist als der Oberflächeninhalt jener Halbkugel, welche durch Rotation des Halbkreisbogens UP um die y-Achse entsteht (Dabei gilt $Q=M_{DS}$, $R=M_{QS}$ usw.).

29) Einem Drehkegel (r, h) wird eine koaxiale Drehparaboloidkalotte eingeschrieben, welche den Kegel längs seines Basiskreises berührt. Es bezeichne s die Erzeugendenlänge des Kegels ($s = \sqrt{r^2 + h^2}$) und $\mathrm{AM}(\alpha, \beta)$ bzw. $\mathrm{HM}(\alpha, \beta)$ das arithmetische bzw. harmonische Mittel zweier reeller Zahlen α und β. Beweise die Formel

$$M = \frac{4r\pi}{3} \cdot \mathrm{AM}(r, s) - \frac{r\pi}{3} \cdot \mathrm{HM}(r, s)$$

für den Mantelflächeninhalt obiger Drehparaboloidkalotte und zeige, dass dieser stets mehr als $\frac{2}{3}$ des Inhalts der Mantelfläche des Kegels beträgt!

30) a) Ermittle den Parameter a in der Gleichung der Kurve k: $y^3 = ax^5$ derart, dass P(8|32) auf k liegt.

b) Rotiert k im Intervall $\left[0; \frac{216}{125}\right]$ um die x-Achse, so entsteht ein Drehkörper.
Zeige, dass sein Mantelflächeninhalt M und sein Oberflächeninhalt F jeweils rationale Zahlen sind und kontrolliere, dass die (exakte!) Proportion $F : M = 13211 : 11664$ gilt.

31) Ein Kreissektor mit dem Radius r und dem Zentriwinkel 2α rotiert um seine Symmetrieachse. Ist die angegebene Formel für den Oberflächeninhalt des entstehenden Drehkörpers richtig?

$$O = r^2\pi(2 + \sin\alpha - 2\cos\alpha)$$

Dabei sind alle in der Rechnung auftauchenden Flächeninhalte mittels Integralrechnung herzuleiten!
Untersuche auch Spezialfälle!

32) Rotiert eine Kreislinie k um einen (ihrer) Durchmesser, so entsteht eine Kugelfläche Φ.

a) Beweise: Bezeichnet u bzw. M den Umfang von k bzw. den Mantelflächeninhalt von Φ, so gilt $M=\boxed{\frac{1}{\pi}}\cdot u^2$ (*).

b) Wodurch ist der Faktor $\boxed{\frac{1}{\pi}}$ in der Formel (*) zu ersetzen, wenn man statt einer Kreislinie die Astroide mit der Gleichung $\boxed{x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}}$ betrachtet?

33) Via $y = tx^2 + (4-6t)\cdot x + 9t - 7$ ist eine Parabelschar mit dem Scharparameter t gegeben.

a) Zeige, dass je zwei Parabeln aus dieser Schar einander im Punkt T(3|5) berühren.

b) Zeige, dass die Scheitelpunkte all dieser Parabeln auf der Gerade g [g: y = 2x – 1] zu liegen kommen.

c) Beweise: Die x-Koordinate des Schwerpunkts jenes Flächenstücks, welches die allen Parabeln gemeinsame Tangente zusammen mit der y-Achse und einer beliebigen Parabel aus der Schar begrenzt, beträgt unabhängig von der Wahl von t stets ¾.