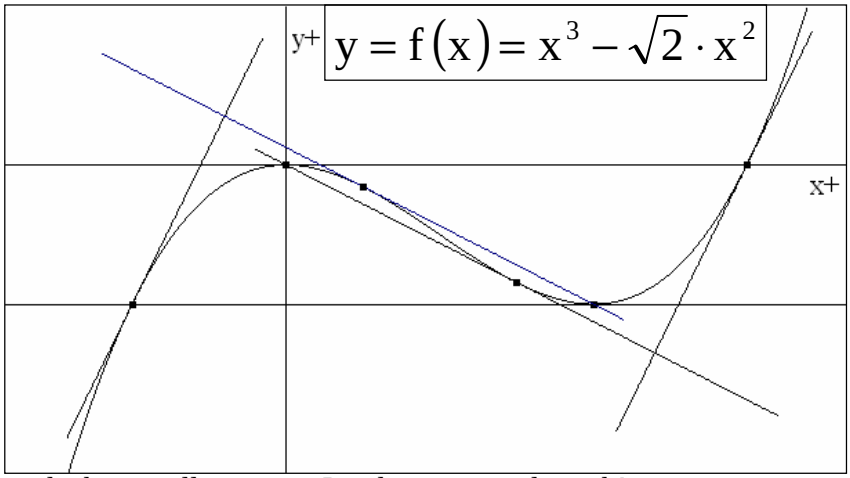
11) a) Ergänze: Die Koeffizienten des Zähler- und des Nennerpolynoms der Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = \frac{p^4x^2 + p^3x + p^2}{px + 1}$ (Dabei soll $p \neq 0$ sein!) bilden eine …….. Folge.

b) Warum darf das konstante Glied im Nennerpolynom o.B.d.A. gleich 1 gesetzt werden? Begründe deine Antwort!

c) Zeige, dass f unabhängig von der Wahl von p keine Nullstellen besitzt.

d) Zeige, dass die Hoch- bzw. Tiefpunkte von f allesamt auf der y-Achse bzw. auf der Kubik mit der Gleichung $x^2y + 12 = 0$ zu liegen kommen!

12) In nebenstehender Abbildung ist der Graph Γ_f der Funktion f mit der gerahmten Funktionsgleichung zusammen mit besonderen Punkten sowie vier Tangenten illustriert, wobei ausgehend vom Tiefpunkt T die Tangente im zweiten gemeinsamen Punkt von Γ_f und der Tiefpunkttangente ermittelt wird und darauf aufbauend die dazu parallele sowie die dazu normalen Tangente(n) an Γ_f. Berechne auch die Lage aller (nicht nur der markierten!) Schnittpunkte in dieser Konfiguration und weise die bereits illustrierten Inzidenzen jeweils nach!



13) Durch $k : a^2y^2 = x^2(a^2 - x^2)$ ist ein liegender Achter beschrieben. Beweise:

(a) Die Doppelpunkttangenten von k schneiden einander rechtwinklig.

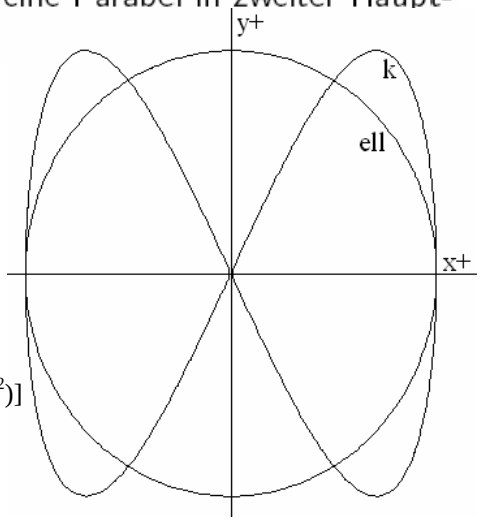
(b) Durch die beiden oberhalb der $x-$Achse liegenden Punkte P und Q von k, deren Kurventangenten parallel zu den Doppelpunkttangenten verlaufen, läßt sich eine Parabel in zweiter Hauptlage legen, welche k in P und Q rechtwinklig schneidet.

14) Durch $k : 2ay^2 = 3x^2(a - x)$ ist ein NEWTONscher Knoten beschrieben. Beweise: Durch jenen im ersten Quadranten liegenden Punkte P von k, dessen Kurventangente parallel zu einer Doppelpunkttangente verläuft, läßt sich eine Parabel in zweiter Hauptlage legen, welche k in P rechtwinklig schneidet.

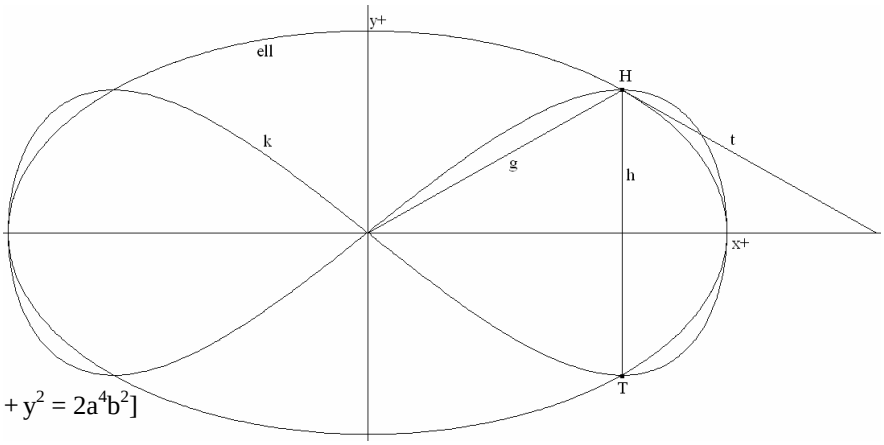
15) In nebenstehender Figur sind die Ellipse ell [ell: $3x^2 + 2y^2 = 12$] sowie die LISSAJOUS-Kurve k [k: $2y^2 = 3x^2 \cdot (4 - x^2)$] abgebildet.

a) Zeige, dass ell und k einander in zwei Punkten berühren, in vier Punkten rechtwinklig schneiden und ferner beiden Kurven das gleiche flächenkleinste Rechteck mit zu den Koordinatenachsen parallelen Seiten umschrieben werden kann.

+ b) Verallgemeinerung für ell [ell: $3x^2 + 2y^2 = 6a^2$] und k [k: $a^2y^2 = 3x^2 \cdot (2a^2 - x^2)$]



16) In nebenstehender Figur sind die Ellipse ell [ell: $36x^2 + y^2 = 288$] sowie die LISSAJOUS-Kurve k [k: $y^2 = 9x^2 \cdot (8 - x^2)$] abgebildet.



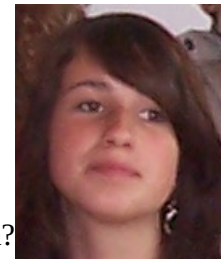
a) Zeige, dass ell und k einander in zwei Punkten berühren und in den Hoch- und Tiefpunkten von k schneiden und ferner die Tangente t an ell in H durch Spiegelung von g an h entsteht.

+ b) Verallgemeinerung für ell [ell: $a^2b^2x^2 + y^2 = 2a^4b^2$] und k [k: $y^2 = b^2x^2 \cdot (2a^2 - x^2)$]

Wie euch vielleicht schon aufgefallen ist, befanden sich unter den ersten 16 Aufgaben keinerlei **Optimierungsaufgaben**, was sich nun mit den nächsten 16 Aufgaben schlagartig ändert.

!! Puncto "Optimierungsaufgaben" sei an dieser schließlich noch der gut gemeinte Ratschlag gegeben, auch jene Übungsaufgaben nicht zu verschmähen, welche die heurige von mir unterrichtete siebente Klasse [7D(Rg)] zuzüglich zu eurem letztjährigen Übungsprogramm erfreut, insbesondere (nebst der auch bei euch in der 7. Klasse auf Eis gelegten **Aufgaben 67 bis 99**) die **Aufgaben 108 bis 112**! !!!

17) In der "JFK" (Joghurt-Fabrik Kern, Besitzerin: Abbildung rechts) sollen zylindrische Joghurtbecher mit einem Volumen von 0,371 Liter produziert werden, die mit einem Aluminiumdeckel verschlossen werden sollen. Dabei ist der Preis für das Aluminiumblech fünfmal so hoch wie für das verwendete Plastik des Mantels und der Grundfläche. Wie groß wird Nina (als mathematisch gebildete Unternehmerin, weil AHS-Maturantin mit fundiertem Mathematikunterricht) unter diesen Annahmen den Radius und die Höhe des Bechers wählen, um die Kosten für ihr Unternehmen möglichst gering zu halten?



18) Gegeben sei ein Parabelsegment, welches durch eine zur Parabelachse normale Sehne s und den entsprechenden Parabelbogen begrenzt wird. Diesem Segment ist nun

(a) das flächeninhaltsgrößte Dreieck einzuschreiben, dessen Spitze im Halbierungspunkt von s zu liegen kommt,

(b) das flächenkleinste Dreieck umzuschreiben, dessen Basis auf der Trägergeraden von s liegt.

- In welchem fortlaufenden Verhältnis stehen die Flächeninhalte des eingeschriebenen Dreiecks aus (a), des Parabelsegments und des umschriebenen Dreiecks aus (b)?
- Welche Beziehung besteht zwischen den Basiseckpunkten des Dreiecks aus (a) und den Berührunspunkten der Schenkel des Dreiecks aus (b) und der Parabel?

19) Durch einen Punkt $P(a|b)$ des ersten Quadranten soll jene Gerade g gelegt werden, welche zusammen mit den positiven Koordinatenachsen ein Dreieck von minimalem Flächeninhalt erzeugt.

(a) Berechne die Steigung von g in Abhängigkeit von a und b!

(b) Berechne den minimalen Flächeninhalt in Abhängigkeit von a und b!

(c) Gib eine möglichst einfache Anleitung zur Konstruktion von g bei vorgegebenem P!

20) In die Volumsformel für eine Drehhyperboloidkalotte (wobei der Achsenschnitt eine *gleichseitige* Hyperbel ist!) mit Radius r und Höhe h hat sich ein Fehler eingeschlichen:

$$V = \frac{h\pi}{6} \cdot (3r^2 + h^2)$$

- Stelle ihn richtig!
- Für welche Höhe h nimmt das Volumen bei festem Radius r den größtmöglichen Wert an (Nachweis des Maximums!)? Gib das Resultat in Abhängigkeit von ebenjenem festen Radius r an. Wie groß sind dann h und r für $V = 67\text{cm}^3$?

21) Einem Drehparaboloid der Höhe h werden koaxiale Drehkegel mit der Spitze im Basiskreismittelpunkt des Paraboloids eingeschrieben.

(a) In welchem Verhältnis teilt der volumsgrößte all dieser Kegel das Volumen des Paraboloids?

(b) In welchem Verhältnis teilt der Basiskreis des optimalen Kegels aus (a) das Volumen des Paraboloids?

22) (a) Welcher Punkt P_1 auf der Symmetrieachse eines gleichschenkligen Dreiecks hat die Eigenschaft, dass die Summe der Abstände von P zu den Eckpunkten des Dreiecks minimal ist? Weise das Minimum nach!

(b) Wie (a) mit der Summe der Quadrate der Abstände! Welcher besondere Punkt ist P_2?

(c) Wie muss das Dreieck zusätzlich beschaffen sein, damit P_1 und P_2 zusammenfallen?

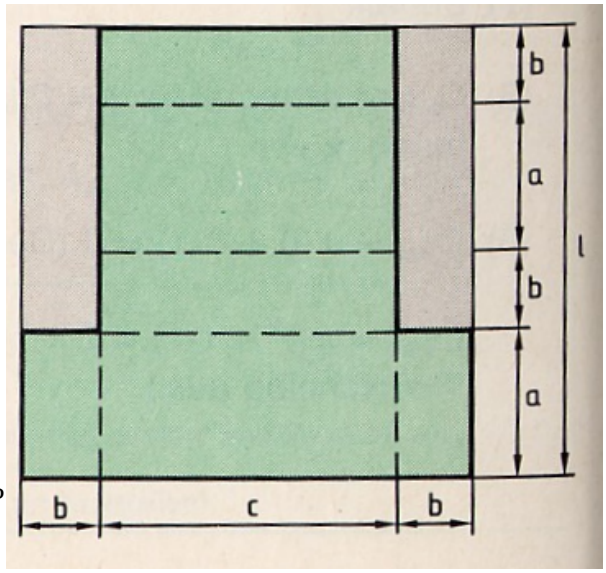
23) In einem Punkt P einer Parabel (Parameter p, Achse a) wird die Normale n_P gelegt, ihr Schnittpunkt mit a sei mit A bezeichnet. Ferner sei mit B der Schnittpunkt der Normalen n auf a durch A mit der Tangente t_P an die Parabel in P bezeichnet.
Für welche Lage von P (relativ zu a und dem Brennpunkt der Parabel) nimmt der Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC den kleinstmöglichen Wert an? Wie groß ist dieser?

24) Jede Parabel in erster Hauptlage besitzt eine gemeinsame Sehne mit dem Kreis $k[M(0|0), r=4\sqrt{2}]$. Stelle eine Gleichung jener Parabel auf, welche mit dieser gemeinsamen Sehne das flächeninhaltsgrößte Segment begrenzt und berechne diesen maximalen Flächeninhalt.
Nimm Stellung zu Mad Mikes Behauptung, dass das Verhältnis der Flächeninhalte der Kreisscheibe und des Segments 87:410 beträgt.

25) Einer Halbkugel (Radius r) ist ein koaxialer Kegelstumpf maximaler Mantelfläche einzuschreiben. Unter welchem Winkel sind die Mantellinien dieses Kegelstumpfs gegen die gegen seine Grund- und Deckfläche geneigt. Drücke die maximale Mantelfläche durch r aus!

26) Ex-Klassensprecherin Kathi L. bereitet sich 2014 gerade auf ihre Diplomprüfung vor, als sie ihr kleiner Bruder (mittlerweile ein stolzer Volksschüler) um Hilfe bei (s)einer Hausübung bittet:

Auf einem quadratischen Blatt Papier der Seitenlänge l (wie Loupal, nicht mit einer "1" zu verwechseln!) soll er das Netz eines Quaders zeichnen. Weil er unter allen Schülern den größten Quader haben möchte und (leider) noch nicht differenzieren kann, fragt er natürlich seine große Schwester um Rat, da sie (Mathematik)-Matura hat.



a) Wozu wird ihm Kathi bezüglich der Abmessungen raten?
b) Welches maximale (von l abhängige) Volumen ergibt sich?
c) Berechne, welchen Bruchteil des Quadrats der Abfall beträgt!

27) Für eine reelle Funktion f mit dem Definitionsbereich $D = \mathbb{R}^+$ gelten auf ganz D die analytischen Eigenschaften $f(x) > 0$, $f'(x) < 0$ sowie $f''(x) > 0$.

a) Illustriere diese analytischen Eigenschaften anhand einer Skizze des Graphen Γ_f einer möglichen Funktion f. Gib ihre Funktionsgleichung an!
b) Dem Normalbereich unter Γ_f über D ist ein achsenparalleles Rechteck bzw. ein rechtwinkliges Dreieck mit den Koordinatenachsen als Katheten mit jeweils größtem Flächeninhalt einzuschreiben.
   i) Beweise, dass die Hypotenuse des gesuchten Dreiecks Γ_f in einem Eckpunkt des gesuchten Rechtecks berührt.
   ii) Beweise, dass das gesuchte Dreieck einen doppelt so großen Flächeninhalt als das gesuchte Rechteck aufweist.
   iii) Welchen Sinn hat die Forderung $f''(x) > 0$?

28) Für eine reelle Funktion f mit dem Definitionsbereich $D = \mathbb{R}^+$ gelten auf ganz D die analytischen Eigenschaften $f(x) > 0$, $f'(x) < 0$ sowie $f''(x) > 0$.

b) Illustriere diese analytischen Eigenschaften anhand einer Skizze des Graphen Γ_f einer möglichen Funktion f. Gib ihre Funktionsgleichung an!
c) Dem Normalbereich unter Γ_f über D ist ein achsenparalleles Rechteck bzw. ein rechtwinkliges Dreieck mit den Koordinatenachsen als Katheten einzuschreiben, welches bei Rotation um die x-Achse den volumsgrößten Drehzylinder bzw. Drehkegel erzeugt.
   i) Beweise, dass die Hypotenuse des gesuchten Dreiecks Γ_f in einem Eckpunkt des gesuchten Rechtecks berührt.
   ii) Beweise, dass die Volumina von Kegel und Zylinder sich wie 9 : 8 verhalten!
   iii) Welchen Sinn hat die Forderung $f''(x) > 0$?

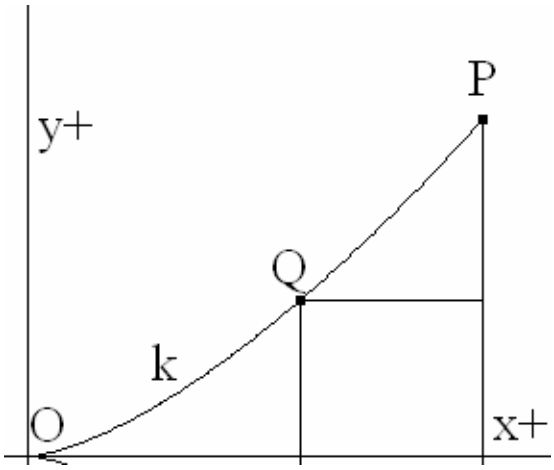
29) Durch P(75|125) geht eine NEILsche Kurve k [k: $y^2 = ax^3$].

a) Stelle eine Gleichung von k auf!

b) Schreibe dem Normalbereich unter k im Intervall [0;75] das flächengrößte Rechteck ein (Hinweis: Siehe Abbildung rechts und orientiere dich an Q!).

c) Begründe ohne Taschenrechner, dass das Rechteck aus b) weniger als 48% des Normalbereichs ausmacht.

d) Berechne die Länge des Bogens $\overset{\frown}{OQ}$ und begründe ebenfalls ohne Taschenrechner, dass diese Länge um mehr als 70% länger ist als die kürzeste Verbindung!

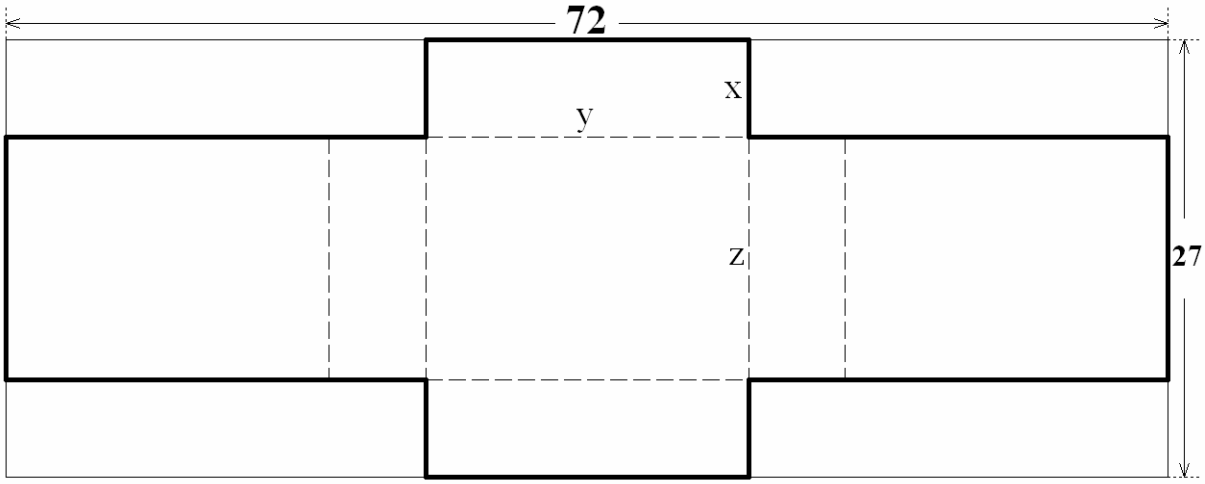


30) Aus einem 72cm langen und 27cm breiten Rechteck soll das Netz des volumsgrößten Quaders mit Doppeldeckel gewonnen werden.

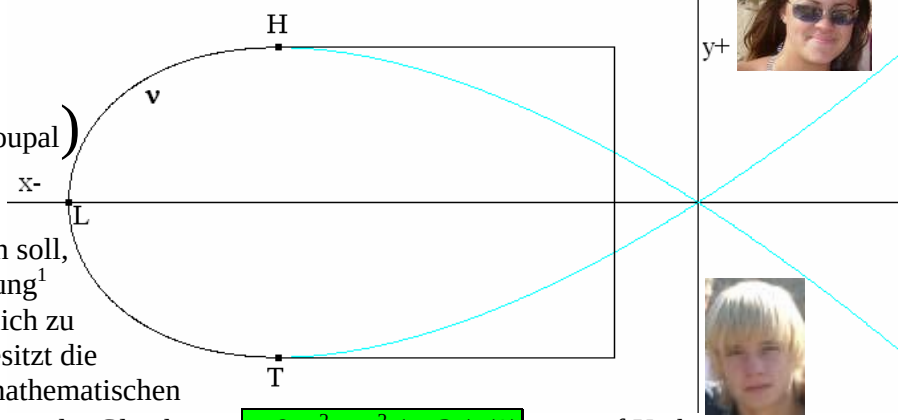
a) Berechne die sich aus dieser Forderung ergebenden Werte für die Länge, Breite und Höhe des Quaders (siehe Abbildung), wobei das Maximum nachzuweisen ist!

b) Wie groß ist das maximal erreichbare Volumen?

c) Begründe ohne Verwendung des Taschenrechners, dass der Abfall weniger als $\frac{1}{3}$ beträgt!



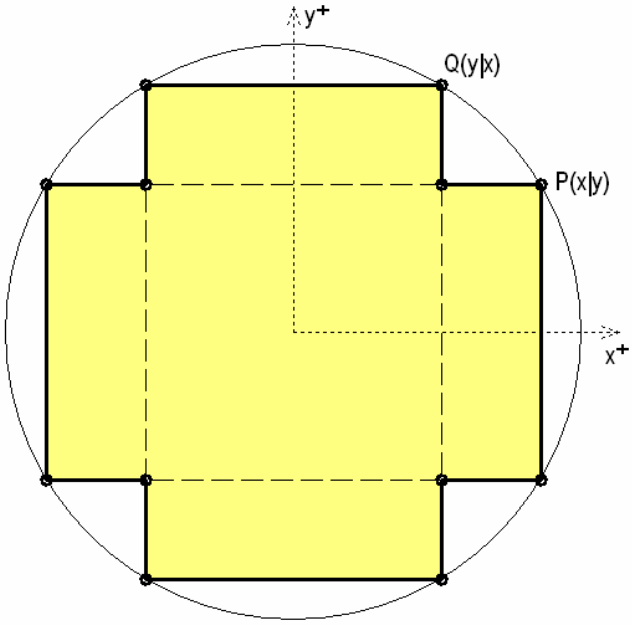
31) **"KABEL"**-Kathi (**KA**nal-**B**au-**E**xpertin **L**oupal) plant einen unterirdischen Abwasserkanal, welcher eine Querschnittsfläche von $0{,}8m^2$ aufweisen soll, wobei die erforderliche Ummauerung[1] aus Kostengründen selbstverständlich zu minimieren ist. Der Querschnitt besitzt die rechts skizzierte Form, anbei die mathematischen Details: ν ist der NEWTON-Knoten mit der Gleichung $\nu: 9ay^2 = x^2 \cdot (x+3a)$ (*), worauf Kathis Berater **"STS"**"-Basti (**ST**atik-**S**chorschi) durch eine seiner berühmten Analysen stieß. Welcher Wert ergibt sich daher für a und die zweite Seite b [Nota bene: Die erste Seite(nlänge) HT ($\overline{HT}$) läßt sich ja via (*) durch a ausdrücken!]?



---

[1]: Hier ist zu beachten, dass die Ummauerung – weil es sich um einen unterirdischen Kanal handelt! – "komplett rundherum" erfolgt (also anders als bei den Optimierungsaufgaben 64 und 65 der letztjährigen 7BC bzw. heurigen 7D, wo die entsprechende Hochquellenwasserleitung ja nach oben offen war!)!

32) Aus einer Kreisscheibe soll wie in nebenstehender Abbildung illustriert das Netz eines oben offenen Quaders mit quadratischer Grundfläche gewonnen werden.



a) Ermittle zunächst allgemein in Abhängigkeit vom Kreisradius r die Länge (=Breite) und Höhe des volumsgrößten Quaders, wobei hier der Nachweis des Maximums kann entfallen kann! (*Anleitung*: Ansatz mit P, x>y!)

b) Ermittle unter Anwendung von a) die konkreten Werte für r=531!

c) Nimm Stellung zu Mad Mikes Behauptung, dass das maximal erreichbare Quadervolumen $\frac{11}{30} \cdot r^3$ beträgt!

Gutes Gelingen beim Lösen dieser schönen Aufgaben!

Wien, im August 2008. Dr. Robert Resel, e. h.