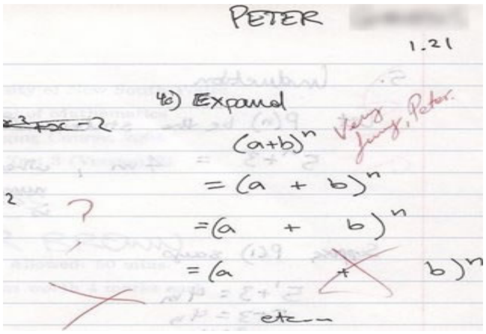

# Übungsbeispiele sowohl für die dreistündige Schularbeit als auch die schriftliche Matura

## (8C, Realgymnasium, 2008/09)


*Diese Beispiele sollen durch die sowohl für die dreistündige Schularbeit als auch die schriftliche Matura relevanten Stoffgebiete führen, wobei an dieser Stelle mit der* **Differentialrechnung** *ein (wenn nicht überhaupt* ***das*** *zentrale) Kapitel der 7. Klasse exemplarisch nochmals aufgerollt wird, und zwar anhand von Aufgaben, deren "Bausteine" geradezu charakteristisch für* ***Maturabeispiele*** *sind.*

***ACHTUNG! Ein bloßes "Auswendiglernen" der Beispiele ist sicher keine ausreichende Matura- resp. Schularbeitsvorbereitung, da du deine erworbenen Kenntnisse sowohl bei der dreistündigen Schularbeit als auch bei der schriftlichen Matura auf Problemstellungen anzuwenden hast, die zwar nicht gänzlich neuartig, aber zum Teil in der Form wie bei der dreistündigen Schularbeit resp. der schriftlichen Matura gestellt in dieser Aufgabensammlung nicht enthalten sind! Ein eigenständiges Lösen dieser Aufgaben (bis auf jene, die wir in diversen Schulübungen gemeinsam bearbeiten werden) ist eine absolute Notwendigkeit für ein angemessenes Übungsprogramm!***




1) **Zum Aufwärmen ein einfaches Beispiel, das auch deine kreative mathematische Ader fordert:**

**Satz.** Die Tangenten an die Graphen der Funktionen f und $\frac{1}{f}$ in den Punkten $P(z|f(z))$ und $Q\left(z\middle|\frac{1}{f(z)}\right)$ schneiden einander an der Stelle $x = z + \frac{f(z)}{f'(z)} \cdot \frac{1-f^2(z)}{1+f^2(z)}$.

Verifiziere diesen Satz für eine selbstgewählte Funktion (vielleicht zunächst ganz bescheiden eine Potenzfunktion niedriger Ordnung)!

2) **Jetzt legen wir den zweiten Gang ein:**

Für jedes $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ wird durch die Gleichung $y^2 = x^2 \cdot (a^2 - x^2)$ ein liegender Achter beschrieben. Zeige, dass die Hochpunkte all dieser liegenden Achter auf der Parabel mit der Gleichung $y = x^2$ liegen.

3) **Raus aus der 30er-Zone und in den dritten Gang schalten:**

$$\boxed{y = f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{px + q}}$$

**Satz.** Für die rationale Funktion f mit nebenstehender Funktionsgleichung gilt die Funktional-Differentialgleichung $f''(x) = \frac{4p^2q \cdot f\left(\frac{p}{q}\right)}{(px+q)^3}$!

Beweise diesen Satz oder/und(!) verifiziere ihn (zunächst) für ein einfaches selbst gewähltes Quintupel!

4) **… und rauf auf die (mathematische) Autostraße, ergo: Gang 4:**

$$\boxed{y = f(x) = \frac{x^2 + 3t^2}{x^2 + 27t^2}}$$

Zeige, dass einander die Wendetangenten des Graphen der Funktion f mit nebenstehender Funktionsgleichung für jeden Wert von t (ausgenommen 0) im Koordinatenursprung schneiden. (Vielleicht fängst du auch bescheiden mit einem konkreten Wert für t an …)

5) Der Gesamtwiderstand $R_{ges}$ einer Parallelschaltung errechnet sich aus den Einzelwiderständen $R_1$, $R_2$, … und $R_n$ nach nebenstehender Formel.

$$R_{ges} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}$$

a) (Basics!!) Leite für den Spezialfall n=2 die Formel $R = ½\cdot H(R_1,R_2)$ (*) her, wobei $H(R_1,R_2)$ das harmonische Mittel von $R_1$ und $R_2$ bezeichnet.

b) Fasst man die rechte Seite von (*) als Funktion der Variable $R_1$ auf und behandelt $R_2$ wie eine Konstante, so läßt sich die abhängige Variable R (eigentlich: $R_{ges}$!) zweimal nach $R_1$ differenzieren, was die sogenannte ***(reine) partielle Ableitung zweiter Ordnung von R nach $R_1$*** liefert, welche als $R_{R_1R_1}$ angeschrieben wird.

$$R_{R_1R_1} \cdot R_{R_2R_2} = \frac{4R^2}{(R_1+R_2)^4}$$

Ebenso läßt sich die entsprechende partielle Ableitung 2. Ordnung $R_{R_2R_2}$ bilden.

Beweise, dass dann die ***obige partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung*** gilt.

**Beachte in den Aufgaben 6) bis 8), dass a und b Konstanten sind (sic! → siehe LISSAJOUS-Kurven!)!**

6) Zeige: Für $y^2 = b^2x^2\cdot(a^2-x^2)$ gilt $\boxed{y''' = \pm\frac{-3a^4b}{\sqrt{(a^2-x^2)^5}}}$.

7) Zeige: Für $y^2 = b^2x^2\cdot(a^2-x^2)$ gilt $\boxed{y' = \pm\left(\frac{y}{x} - \frac{b^2x^3}{y}\right)}$.

8) Zeige: Für $y^2 = b^2x^2\cdot(a^2-x^2)$ gilt $\boxed{y'' = \pm\left(\frac{2b^2x^2}{y} + \frac{a^2b^4x^4}{y^3}\right)}$.

9) a) Lege durch die Punkte $P(-140|y_P)$ und $R(100|y_R)$ des Graphen $\Gamma_f$ der rationalen Funktion f mit der nebenstehenden Funktionsgleichung die eindeutig bestimmte Gerade $g_{PR}$ und ermittle die Koordinaten des **dritten gemeinsamen Punkts Q von $\Gamma_f$ und $g_{PR}$**.

$$y = f(x) = \frac{x^3}{(x-140)^2}$$

b) Wegen **dessen Existenz** handelt es sich bei $\Gamma_f$ also um eine *kubische Kurve*. Verifiziere am konkreten Beispiel von $\Gamma_f$ und der Punkte N, P und Q den

**Satz.** Sind P, Q und R kollineare auf einer kubischen Kurve ν liegende Punkte mit den entsprechenden Tangenten $t_P$, $t_Q$ und $t_R$ und gilt $t_P \cap \nu = \{P, P'\}$, $t_Q \cap \nu = \{Q, Q'\}$ sowie $t_R \cap \nu = \{R, R'\}$, dann liegen auch die Punkte P´, Q´ und R´ wieder kollinear.

10) a) Lege durch die Punkte $N(0|y_N)$ und $P(-150|y_P)$ des Graphen $\Gamma_f$ der rationalen Funktion f mit der nebenstehenden Funktionsgleichung die eindeutig bestimmte Gerade $g_{NP}$ und ermittle die Koordinaten des **dritten gemeinsamen Punkts Q von $\Gamma_f$ und $g_{NP}$**.

$$y = f(x) = \frac{480x}{(x+30)^2}$$

b) Wegen **dessen Existenz** handelt es sich bei $\Gamma_f$ also um eine *kubische Kurve*. Verifiziere am konkreten Beispiel von $\Gamma_f$ und der Punkte N, P und Q den

**Satz.** Sind N, P und Q kollineare auf einer kubischen Kurve ν liegende Punkte mit den entsprechenden Tangenten $t_N$, $t_P$ und $t_Q$ und gilt $t_N \cap \nu = \{N, N'\}$, $t_P \cap \nu = \{P, P'\}$ sowie $t_Q \cap \nu = \{Q, Q'\}$, dann liegen auch die Punkte N´, P´ und Q´ wieder kollinear.