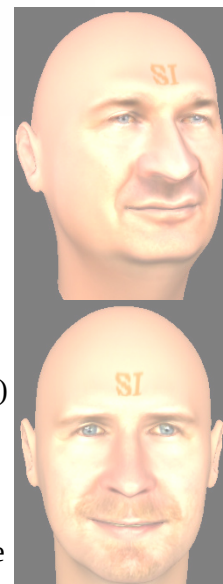


- 14) Die σ -Regel für die Normalverteilung besagt bekanntlich, dass für eine normalverteilte Zufallsvariable X mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ die Beziehung $P(|X-\mu|<\sigma) \approx 68,26\%$ gilt. Betrachte nun die Zufallsvariable X mit $\Omega=[0;t]$ und der Dichtefunktion $\varphi(x)=6 \cdot t^{-2} \cdot (\sqrt{t} \cdot \sqrt{x-x})$, wobei $t>0$.
- Zeige zunächst, dass sich φ formal für jedes $t>0$ als Dichtefunktion eignet.
 - Berechne den Erwartungswert μ von X !
 - Berechne die Standardabweichung σ von X und leite für X ebenso eine σ -Regel her! Gib das Resultat auf Zehntelpromille genau an!

- 15) Die σ -Regel für die Normalverteilung besagt bekanntlich, dass für eine normalverteilte Zufallsvariable X mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ die Beziehung $P(|X-\mu|<\sigma) \approx 68,26\%$ gilt. Betrachte nun die Zufallsvariable X mit $\Omega=[0;t]$ und der Dichtefunktion $\varphi(x)=20 \cdot t^{-5} \cdot (t \cdot x^3 - x^4)$, wobei $t>0$.
- Zeige zunächst, dass sich φ formal für jedes $t>0$ als Dichtefunktion eignet.
 - Berechne den Erwartungswert μ von X !
 - Berechne die Standardabweichung σ von X und leite für X ebenso eine σ -Regel her! Gib das Resultat auf Zehntelpromille genau an!

- 16) Kurz vor seiner Pensionierung im Jahr 203X hält Prof. H. (in nebenstehender Abbildung simuliert gealtert! J) seine letzte dreistündige Schularbeit ab. Er betritt die Klasse pünktlich um 8¹⁵, da er um 11⁰⁰ ebenso pünktlich bei einer Lehrergeburtstagsfeier sein möchte und nimmt erst frühestens ab 10⁰⁰ Arbeiten entgegen. Aufgrund langjähriger Erfahrung und statistischer Hilfeleistung seines Kollegen Prof. R. (unter Prof. H. ebenfalls simuliert gealtert! J) weiß er, dass die ab 10⁰⁰ in Stunden gemessene Arbeitszeit als stetige Zufallsvariable mit dem Ereignisraum $\Omega = [0;1]$ nach der Dichtefunktion φ mit der Funktionsgleichung $\varphi(x)=a \cdot (x^n - x^{3n})$ verteilt ist.

- Ermittle a (in Abhängigkeit von n)!
- Da Prof. H. ja bekanntlich Deutsch und Französisch unterrichtet und sich für diese beiden Gegenstände verschiedene Werte des Exponenten n ergeben, ist der für Deutsch spezifische Exponent n zu ermitteln, wenn die durchschnittliche Gesamt-Arbeitszeit 2h40'32'' beträgt.
- Wie viel % der Schüler schreiben gemäß dem vorliegenden stochastischen Modell länger als die in b) angegebene Durchschnittszeit?



- 17) Fünf Gruppen von "Alt-Franzosen" (wie ihr es seid! ☺) schreiben im Mehrzwecksaal eines Wiener Gymnasiums zusammen ihre erste zweistündige Schularbeit. Insgesamt sind 102 Schüler anwesend, welche von 10¹⁰ bis 12¹⁰ Zeit haben, ihre Französischkenntnisse unter Beweis zu stellen, wobei erst ab 11¹⁰ (ab der Halbzeit mitten in der 11h-Pause!) Arbeiten entgegengenommen werden. Prof. H. und Prof. R. (siehe Abbildung rechts bei einem ihrer OpenAir-Konzerte im Juni 2007, ihr erinnert euch? ☺) halten die Aufsicht, wobei Prof. H. als Fachmann und Prof. R. als "statistical analyst" vertreten ist. Letzterer möchte anhand dieser Stichprobe die Hypothese überprüfen, derzufolge die von 11¹⁰ an in Stunden gemessene Zeitspanne bis zum Abgeben als stetige Zufallsvariable X mit $\Omega_X=[0;1]$ gemäß der Dichtefunktion φ mit $\varphi(x)=6x^2 \cdot (1-x^3)$ verteilt ist [wie mittlerweile



jahr(zehnt)elange empirische Untersuchungen bei diesem speziellen Typ von Schularbeit nahegelegt haben].

- "Kontrolle ist besser als Vertrauen!", in diesem Sinn: Überprüfe, dass φ tatsächlich Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariable X mit $\Omega_X=[0;1]$ ist und skizziere den Graphen ("Kurvendiskussion light")!
- Berechne $\mu:=E(X)$ und ermittle sodann jenen Zeitpunkt, zu dem die durchschnittliche Arbeitszeit erreicht werden sollte.
- Wie viele der 102 Schüler sollten gemäß des zu überprüfenden stochastischen Modells die durchschnittliche Arbeitszeit überschreiten?
- Berechne die Varianz von X und nimm zur Güte der Approximation $\sigma(X) \approx \frac{23}{120}$ Stellung.
- Berechne $P(|X-\mu|<\sigma)$, wobei die Näherung aus d) zu verwenden ist. Wie viele von 77 Schülern, welche in einer in der Nähe gelegenen Schule eine Schularbeit vom gleichen Typ schreiben, sollten daher gemäß des vorliegenden stochastischen Modells eine Arbeitszeit aufweisen, die gerade in diesem Bereich liegt?
- Berechne den Median von X und ermittle auch den entsprechenden Zeitpunkt. Was sollte zu diesem Zeitpunkt passiert sein?

- 18) Mit "R.O.L.I. presents: Mad Mike" versucht sich Roli erstmals abseits des Brachial-Horrors an einem Psychothriller, in dem es um (surprise!) einen Schizophrenen namens Mad Mike geht. Wegen der äußerst verstörenden Handlung beträgt der Masochismus-Index bei diesem Film gerade einmal 50 Minuten, wobei die Verweildauer eines Zusehers als in Minuten gemessene stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega=[0;a]$ nach der Dichtefunktion ϕ mit der Funktionsgleichung

$$\phi(x) = \frac{5}{2 \cdot a^{5/2}} \cdot x^{1/4} \cdot (a^{5/4} - x^{5/4}) \text{ verteilt ist.}$$

- Berechne den sich aus dem Masochismus-Index [i.e. $E(X)$] ergebenden Wert für die Filmlänge a!
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit sieht nach dem vorliegenden stochastischen Modell ein Zuseher länger als 1h21min zu?
- Berechne für den Director's cut (Lauflänge 3h39min!) den Median von X !

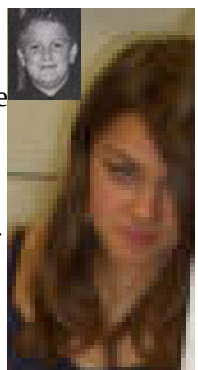


- 19) Nach dem Achtungserfolg "R.O.L.I. presents: Mad Mike" bleibt Roli mit seinem nächsten Werk "R.O.L.I. presents: Loupal legends" dem Genre des Psychothrillers treu und erzählt die Geschichte einer geheimnisvollen jungen Frau (siehe Abbildung rechts!), welche die Männerwelt in Angst und Schrecken versetzt ...

Trotz der wiederum äußerst verstörenden Handlung beträgt der Masochismus-Index wegen des Charismas der Hauptdarstellerin bei diesem Film dennoch stolze 72 Minuten, wobei die Verweildauer eines Zusehers als in Minuten gemessene stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega=[0;a]$ nach der Dichtefunktion ϕ mit der Funktionsgleichung

$$\phi(x) = \frac{12}{5 \cdot a^{12/5}} \cdot x^{1/5} \cdot (a^{6/5} - x^{6/5}) \text{ verteilt ist.}$$

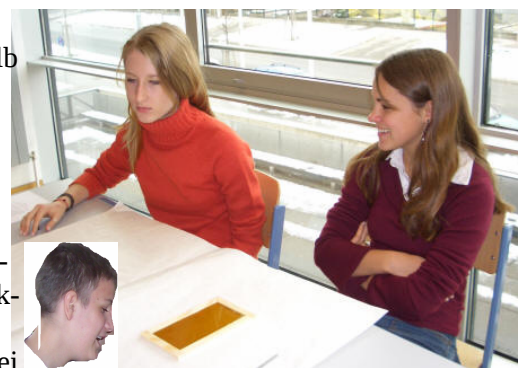
- Berechne den sich aus dem Masochismus-Index [i.e. $E(X)$] ergebenden Wert für die Filmlänge a!
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit verläßt nach dem vorliegenden stochastischen Modell ein Zuseher den Kinosaal bereits während der ersten 13 Minuten?
- Berechne für den "Producer's cut"¹ (Lauflänge 64min!) den Median von X !



- 20) Obwohl Roli mit seinen letzten beiden Filmen (vgl. die letzten beiden Aufgaben!) durchaus erfolgreich zeigen konnte, dass er auch außerhalb der Welt des Brachialhorrors zu verblüffen weiß, kehrt er nun mit "R.O.L.I. presents: Heustadel Highschool Horror" zum Splatterhorror zurück, obwohl das nebenstehende Foto gar nicht diesen Eindruck erweckt (Man muss dazu ja auch wissen, dass die beiden abgebildeten Damen einen wahrhaft teuflischen Plan aushecken, woran die rechte Dame sichtlich ihre helle Freude hat, während das andere Highschool-Girl kontemplativ finstere Pläne schmiedet ... J/L). Da der Gore-Faktor bei Rolis Rückkehr zu seinen Wurzeln derart hoch ist, beträgt der Masochismus-Index bei diesem Film gerade einmal 49 Minuten, wobei

die Verweildauer eines Zusehers als in Minuten gemessene stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega=[0;a]$ nach der Dichtefunktion ϕ mit der Funktionsgleichung $\phi(x) = \frac{7}{3 \cdot a^{7/3}} \cdot x^{1/6} \cdot (a^{7/6} - x^{7/6})$ verteilt ist.

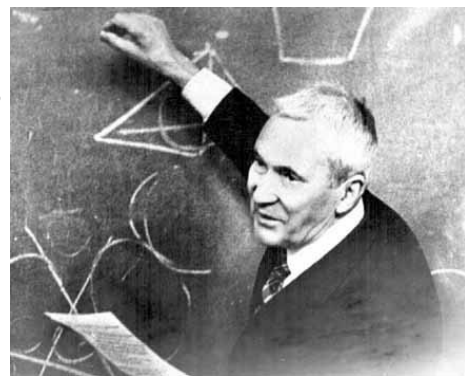
- Berechne den sich aus dem Masochismus-Index [i.e. $E(X)$] ergebenden Wert für die Filmlänge a!
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit hält ein Zuseher gemäß dem vorliegenden stochastischen Modell länger als 1h7min durch?
- Berechne für den "Producer's cut"¹ (Lauflänge 1h46min!) den Median von X !



¹: Roli's executive producer ist ein Intimfeind von Roli! L

- 21) Bei dreistündigen Russisch-Schularbeiten (Arbeitszeit von 8^{00} bis 11^{00}) nimmt Prof. KOLMOGOROW immer erst ab 10^{00} Arbeiten entgegen. Die von 10^{00} an in Stunden gemessene Arbeitszeit ist dann erfahrungsgemäß als stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega=[0;1]$ nach der Dichtefunktion φ mit der Funktionsgleichung $\varphi(x)=a \cdot x^{1,5} \cdot (1-x)^3$ verteilt.

- Ermittle den Parameter a !
- Berechne die durchschnittliche **Gesamt**-Arbeitszeit (also von 8^{00} an gerechnet)! Wann wird sie erreicht?
- Wie viele von insgesamt 72 Schülern (drei Parallelklassen) arbeiten gemäß dem vorliegenden stochastischen Modell nach 10^{30} immer noch?



22) Ein Konsti kommt selten allein ... J

Bei dreistündigen Griechisch-Schularbeiten (Arbeitszeit von 8^{00} bis 11^{00}) nimmt Prof. Constantin CARATHEODORY immer erst ab 10^{00} Arbeiten entgegen. Die von 10^{00} an in Stunden gemessene Arbeitszeit ist dann erfahrungsgemäß als stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega=[0;1]$ nach der Dichtefunktion φ mit der Funktionsgleichung $\varphi(x)=a \cdot x^{2,5} \cdot (1-x)^2$ verteilt.

- Ermittle den Parameter a !
- Berechne die durchschnittliche **Gesamt**-Arbeitszeit (also von 8^{00} an gerechnet)! Wann wird sie erreicht?
- Wie viele von insgesamt 24 Schülern einer Klasse arbeiten geben gemäß dem vorliegenden stochastischen Modell schon vor 10^{30} ab?



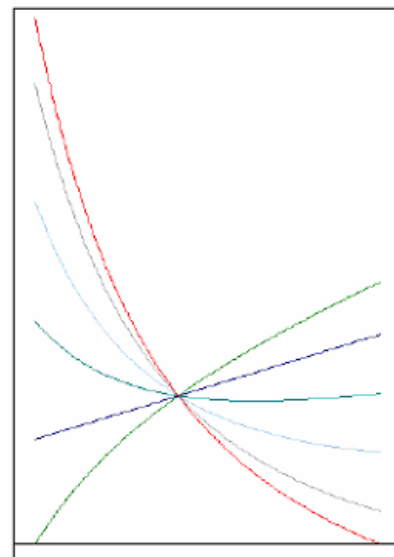
- 23) Das Phänomen, dass so mancher Schüler bereits während einer zweistündigen

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ \frac{8-3t}{12} x + \frac{t}{x^3} & \text{für } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Mathematikschularbeit sein Heft abgibt, wurde nun am hiesigen GRgX von einem Mathematiklehrer durch eine statistische Analyse der letzten

30(!) Jahre genau untersucht, was ihn zum Resultat führte, dass die in Stunden gemessene Arbeitszeit als stetige Zufallsvariable X_t gemäß links oben definierter Dichtefunktion verteilt ist, wobei t ein schulstufenabhängiger Parameter ist.

- Beweise, dass $\varphi \forall t \in \left[-\frac{8}{9}; \frac{32}{9}\right]$ Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariable X ist. In nebenstehender Abbildung sind die Graphen von $\varphi_{-\frac{8}{9}}$, φ_0 , φ_1 , φ_2 , φ_3 und $\varphi_{\frac{32}{9}}$ dargestellt.
- Stelle eine Formel für den Erwartungswert E von X_t auf.
- Für die 8A(G) des Schuljahres 2002/03 galt im ersten Semester, dass nach $1\frac{1}{2}$ Stunden (Arbeitszeit jeweils von 8^{50} bis 10^{50} !) nur noch 7 von 32 Schülern arbeiteten. Welcher Wert für den Parameter t ergibt sich daraus und wann wurde die durchschnittliche Arbeitsdauer erreicht?



- 24) Bei der letzten Schularbeit vor der schriftlichen Klausur aus Mathematik (Beginn: 8^{00} , Dauer: drei Stunden) werden erst nach einer Stunde Arbeiten entgegengenommen. Wie umfangreiche statistische Untersuchungen eines Mathematiklehrers vom GRgX über 30(!) Jahre hinweg zeigten, ist die in Stunden gemessene Arbeitszeit als stetige Zufallsvariable X nach untenstehender Dichtefunktion φ verteilt.

- Weise nach, dass φ alle Eigenschaften einer Dichtefunktion erfüllt!
- Berechne die durchschnittliche Arbeitszeit! Wann wird sie erreicht?
- Wie viel Prozent der Schüler arbeiten nach 10^{17} noch?

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{81}{10} \cdot \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} \right) & \text{für } 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

- 25) Nina und Diana ziehen nach bestandener Matura in eine Studentenwohnung. Als sie den Kauf einer Waschmaschine in Angriff nehmen, entscheiden sie sich aufgrund von Erfahrungen aus dem Hause Kern bzw. Novak für die Marke Siemens. Obwohl die beiden Damen bei Siemens mit Ex-Klassenkamerad "φιλ 007" (s Vater) ohnehin eine (wenn nicht gar die) Ansprechperson (schlechthin) hätten, vergessen sie dies in ihrer Zerstreuung und entsinnen sich ihrer berufspraktischen Tage bei Manpower, wo sie Bekanntschaft mit einem mittlerweile vermittelten Verantwortlichen für Qualitätskontrolle bei Siemens gemacht haben und setzen sich mit diesem Herrn in Verbindung. Voller Stolz (ob des niedrigen Preises!) verkündet er, dass Dianas und Ninas favorisiertes Modell ("Peggie's Washman 007") eine Lebensdauer von mindestens zwei, aber höchstens vier Jahren aufweist, wobei die in Jahren gemessene Lebensdauer als stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega=[2;4]$ nach der Dichtefunktion ϕ mit der Funktionsgleichung $\phi(x) = \frac{3}{49} \cdot \left(x^2 - \frac{64}{x^4}\right)$ verteilt ist.



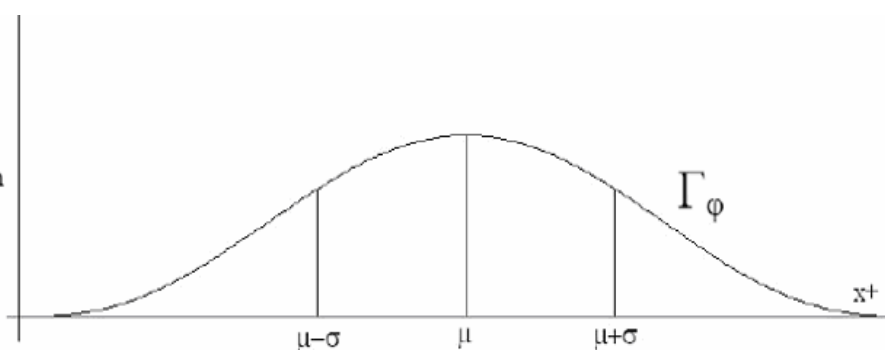
- Zeige zunächst, dass ϕ alle Eigenschaften einer Dichtefunktion erfüllt!
- Berechne (auf Tage genau, wobei der Einfachheit halber jedes Jahr aus zwölf Monaten à 30 Tagen besteht) die durchschnittliche Lebensdauer des "Peggie's Washman 007"!
- Wie viele Geräte aus einer Elferpalette sollten gemäß dem vorliegenden stochastischen Modell ihr viertes Jahr erleben?
- Berechne den Median von X ! Wann wird er erreicht und was sagt er aus?

- 26) Carola und Karina gründen mit "CK" eine (wie Emmy sagen – bzw. quaken J – würde: "g'miadliche") 2er-WG, wo es über kurz oder lang ebenso um den Kauf einer Waschmaschine geht. Sie kontaktieren kurzerhand φιλ's Dad, welcher ihnen den Kontakt zum Chefmathematiker (vielleicht ohnehin φιλ's Dad himself!?) checkt, über den sie in Erfahrung bringen, dass jenes Modell (surprise: Es ist der "CK 007"! J), mit dem die beiden Damen liebäugeln, eine Lebensdauer von mindestens einem, aber höchstens vier Jahr(en) aufweist, wobei die in Jahren gemessene Lebensdauer als stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega=[1;4]$ nach der Dichtefunktion ϕ mit der Funktionsgleichung $\phi(x) = \frac{2}{225} \cdot \left(\frac{256}{x^3} - x\right)$ verteilt ist.



- Zeige zunächst, dass ϕ alle Eigenschaften einer Dichtefunktion erfüllt!
- Berechne (auf Tage genau, wobei der Einfachheit halber jedes Jahr aus 12 Monaten à 30 Tagen besteht) die durchschnittliche Lebensdauer des "CK 007"!
- Wie viele Geräte aus einer 25er-Palette erleben gemäß dem vorliegenden stochastischen Modell ihr drittes Jahr nicht mehr?
- Berechne den Median von X ! Wann wird er erreicht und was sagt er aus?

- 27) Eine stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega_X=[0;1]$ ist nach der Dichtefunktion ϕ mit der Funktionsgleichung $\phi(x)=140 \cdot x^3 \cdot (1-x)^3$ verteilt und ergab sich nach jahr(zehnt)elangen empirischen Untersuchungen über die Arbeitsdauer bei vierstündigen schriftlichen Klausuren aus Russisch nach Annahmebeginn (drei Stunden nach dem eigentlichen Beginn).



- Zeige, dass ϕ in der Tat Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariable X ist und bestimme den Erwartungswert $E(X)=\mu$.
- Ermittle die Standardabweichung σ von X und berechne die Intervallwahrscheinlichkeit $P(|X-\mu|<\sigma)$. Interpretiere das Ergebnis!
- Bei wie vielen von insgesamt 75 Teilnehmern (drei vom gleichen Prof. unterrichtete Parallelklassen!) sollte daher dem Modell gemäß die Arbeitsdauer um maximal σ von μ abweichen?
- Befinden sich an den Stellen $\mu \pm \sigma$ (wie es ja bei der Normalverteilung der Fall ist!) Wendestellen von ϕ (ausführliche Begründung!)?

- 28) Via $\varphi(x) = \frac{2}{h(a+c)} \left(\frac{a-c}{h} \cdot x + c \right)$, $a > 0, c > 0, h > 0$ ist die Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariable X mit $\Omega_x = [0; h]$ definiert.

Dann gelten für den Median m bzw. den Erwartungswert $\mathbb{E}$ von X die folgenden Formeln:

$$m = \frac{\sqrt{2(a^2 + c^2)} - 2ch}{2(a-c)}, \quad \mathbb{E} = \frac{h}{3} \cdot \frac{2a+c}{a+c}$$

Beweise dies oder verifiziere diese Formeln für $(a|c|h)=(7|17|360)$!

- 29) a) Beweise, dass für jeden positiven reellen Parameter durch $\varphi_t(x) = \left(1 + \frac{1}{t}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2t}\right) \cdot (x^t - 1)^2$ eine stetige Zufallsvariable X_t mit dem Ereignisraum $\Omega=[0;1]$ festgelegt ist, welche φ_t als Dichtefunktion besitzt.
 b) Beweise, dass für den Erwartungswert $E(X_t)$ stets die Ungleichung $E(X_t) < \frac{1}{2}$ gilt!
 c) Berechne jenes t , für welches $E(X_t) = 0,45$ gilt!

- 30) Ali und Manu ziehen zu Studienbeginn in eine WG, wofür sie (nicht nur, aber schon auch wegen Damenbesuch → Schaumparties mit Bikinipflicht!) einen Whirlpool anschaffen, welcher aber im Laufe seines zweiten Betriebsjahres gewartet werden muss, wobei die beiden Herren über den Chefmathematiker Phillip Philips (Jaja, "φιλ 007" hat geheiratet! J) in Erfahrung bringen, dass die erste Lebensperiode bis zur Wartung als in Jahren (wobei hier der Einfachheit halber jedes Jahr aus zwölf Monaten à 30 Tagen besteht) gemessene stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega=[1;2]$ nach der Dichtefunktion φ mit der Funktionsgleichung $\varphi(x) = \frac{8}{x^5} - \frac{3}{x^4}$ verteilt ist.



- a) Zeige zunächst, dass φ alle Eigenschaften einer Dichtefunktion erfüllt!
 b) Berechne (auf Tage genau, wobei der Einfachheit halber jedes Jahr aus 12 Monaten à 30 Tagen besteht) die durchschnittliche Nutzungsdauer bis zur Wartung!
 c) Wie viele Geräte aus einer 15er-Palette müssen gemäß dem vorliegenden stochastischen Modell vor Ablauf einer Zeitspanne von einem Jahr, einem Monat und 18 Tagen gewartet werden?

- 31) "Was sich Ali und Manu leisten können, kriegen wir auch locker hin!", sagen sich Konsti und Mad Mike. Also kontaktieren auch sie den Chefmathematiker einer Konkurrenzfirma von Phillips Arbeitgeber (Es ist in beiden Fällen nicht Philips!) und bringen in Erfahrung, dass auch ihr Modell im Laufe seines zweiten Betriebsjahres gewartet werden muss und die erste Lebensperiode bis zur Wartung als in Jahren (wobei hier der Einfachheit halber jedes Jahr aus zwölf Monaten à 30 Tagen besteht) gemessene stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega=[1;2]$ nach der Dichtefunktion φ mit der Funktionsgleichung $\varphi(x) = \frac{24}{25x^5} + \frac{4}{x^6}$ verteilt ist.



- a) Zeige zunächst, dass φ alle Eigenschaften einer Dichtefunktion erfüllt!
 b) Berechne (auf Tage genau, wobei der Einfachheit halber jedes Jahr aus 12 Monaten à 30 Tagen besteht) die durchschnittliche Nutzungsdauer bis zur Wartung!
 c) Wie viele Geräte aus einer 81er-Palette müssen gemäß dem vorliegenden stochastischen Modell vor Ablauf einer Zeitspanne von $1\frac{1}{2}$ Jahren gewartet werden?

Als krönenden Abschluss auf der letzten Seite ein königliches Beispiel bzw. an exercise not only for kings! J

32) Ms. King and her brother Mr. King can be happy, because their parents make them a special present, which consists of two things: A new car and responsibility [because they have to use it together! (? J / L ?)], which includes driving their younger brother. For Mr. King (as a passionate young mathematician) it is important to know mathematical details about the average life expectation of their car, so he calls the mathematical director of the car company, which leads him to the following information: The life expectation of their car as a continuous random variable (unit: years!) X with the event space $\Omega=[0;15]$ is distributed by the function φ with equation $\varphi(x) = \frac{20}{t^3} \cdot x^3 \cdot (b - x)$.

- a) Derive b , when Mr. King got to know that the expectation value of X equals ten years.
- b) Imagine, that 242 more [not necessarily other King(s)! J] parents bought their children the same car. How many of these 243 cars will (based on the given stochastic model) "live" longer than five years?



I wish you some/many successful moments while working on the given exercises!

Vienna, the 22nd of September 2008.

Robert N. Resel, PhD