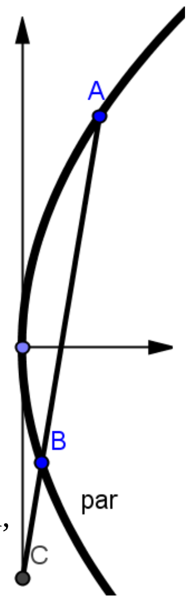
32 zusätzliche Aufgaben zum Üben für die dreistündige Schularbeit sowie die Klausur der 8A(G)/8B(Rg) aus Mathematik bei Dr. Resel im Schuljahr 2012/13



1) Durch die Punkte I(3|–6) und II(6|12) ist eine Gerade g festgelegt, aus welcher die Parabel par in erster Hauptlage mit dem Brennpunkt F(18|0) eine Sehne AB herausschneidet (siehe Abbildung!). Ferner sei mit C der Schnittpunkt von g mit der Scheiteltangente von par bezeichnet. Verifiziere am konkreten Beispiel die Formel $y_C = \frac{1}{2} \cdot H(y_A, y_B)$ für die y-Koordinate von C.

2) Liegen drei Punkte A, B und C auf einer Parabel par in erster Hauptlage derart, dass die drei Kurvennormalen einander in einem gemeinsamen Punkt $N(x_N|y_N)$ schneiden, so besteht zwischen dem Umkreismittelpunkt $U(x_U|y_U)$ und N die Beziehung $y_N = 4 \cdot y_U$. Verifiziere dies für die Punkte A(4|48), B(16|96) und $C(x_C|–144)$!

3) Liegen drei Punkte A, B und C auf einer Parabel par in erster Hauptlage mit dem Brennpunkt F derart, dass die drei Kurvennormalen einander in einem gemeinsamen Punkt $N(x_N|y_N)$ schneiden, so besteht zwischen dem Umkreismittelpunkt $U(x_U|y_U)$ und N die Beziehung $x_N = 2 \cdot (x_U - x_F)$. Verifiziere dies für die Punkte A(4|48), $B(x_B|96)$ und C(36|–144)!

4) Liegen drei Punkte A, B und C auf einer Parabel par in erster Hauptlage mit dem Brennpunkt F derart, dass die drei Kurvennormalen einander in einem gemeinsamen Punkt N schneiden, so gilt für den Umkreismittelpunkt $U(x_U|y_U)$ die Beziehung $y_U = \frac{y_A \cdot y_B \cdot y_C}{(4 \cdot x_F)^2}$.
Verifiziere dies für die Punkte $A(x_A|48)$, B(16|96) und C(36|–144)!

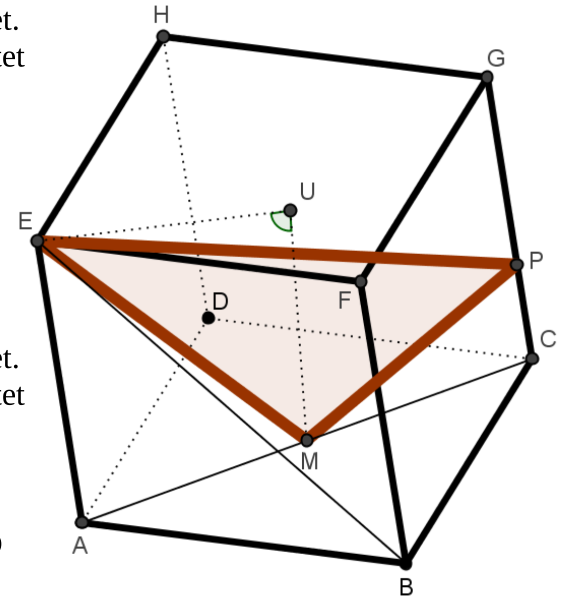
5) In drei Punkten A, B und C einer Parabel par in erster Hauptlage mit dem Brennpunkt F werden die Tangenten t_A, t_B und t_C gelegt. Ferner sei $t_A \cap t_B = \{P_{AB}\}$, sei $t_B \cap t_C = \{P_{BC}\}$ sowie $t_A \cap t_C = \{P_{AC}\}$. Dann gilt für den Umkreismittelpunkt $U(x_U|y_U)$ die Darstellung $x_U = \frac{1}{2} \cdot (x_A + x_B + x_C + x_{P_{AB}} + x_{P_{BC}} + x_{P_{AC}} + 4x_F)$. Verifiziere dies am konkreten Beispiel der Punkte A(2|2), $B(x_B|4)$ und C(18|–6)!

6) In drei Punkten A, B und C einer Parabel par in erster Hauptlage mit dem Brennpunkt F werden die Tangenten t_A, t_B und t_C gelegt. Ferner sei $t_A \cap t_B = \{P_{AB}\}$, sei $t_B \cap t_C = \{P_{BC}\}$ sowie $t_A \cap t_C = \{P_{AC}\}$. Dann gilt für den Umkreismittelpunkt $U(x_U|y_U)$ die Darstellung $y_U = -\frac{y_{P_{AB}} \cdot y_{P_{BC}} \cdot y_{P_{AC}}}{(2 \cdot x_F)^2}$.
Verifiziere dies am konkreten Beispiel der Punkte $A(x_A|2)$, B(8|4) und C(18|–6)!

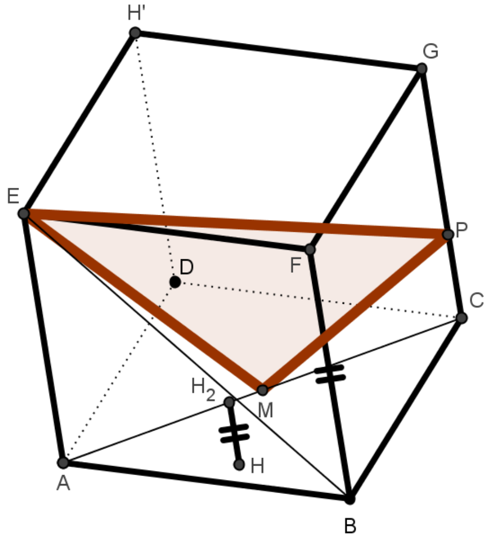
7) In zwei Punkten A und B einer Parabel par in erster Hauptlage mit dem Brennpunkt F werden sowohl die Tangenten als auch die Normalen gelegt. Mit T bzw. N sei der Schnittpunkt der beiden Tangenten bzw. Normalen bezeichnet. Dann liegt die Strecke TN parallel zur Parabelachse und es gilt $\overline{TN} = \frac{(y_A - y_B)^2}{4x_F}$.
Verifiziere dies für die Punkte $A(x_A|128)$ und B(1|–8)!

8) In einem Punkt A einer Parabel par in erster Hauptlage mit dem Brennpunkt F wird die Tangente t gelegt, mit k sei deren Steigung bezeichnet, mit L deren Schnittpunkt mit der Leitgerade von par. Dann gilt für den Flächeninhalt μ des Dreiecks ΔALF die Formel $\mu = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \overline{AF}^2$. Verifiziere dies für den Punkt A(216|72)!

9) In nebenstehender Figur ist ein Würfel der Seitenlänge 24 abgebildet. P entsteht durch Drittelung der Kante CG und ist von C aus betrachtet der erste Teilungspunkt, M ist der Mittelpunkt der Diagonale AC.
   a) Ermittle in einem geeigneten Koordinatensystem die Lage des Umkreismittelpunkts U des Dreiecks ΔEMP!
   b) Zeige, dass der Winkel ∢EUM zum Schnittwinkel zweier Seitenflächen eines regelmäßigen Tetraeders kongruent ist!



10) In nebenstehender Figur ist ein Würfel der Seitenlänge 12 abgebildet. P entsteht durch Drittelung der Kante CG und ist von C aus betrachtet der erste Teilungspunkt, M ist der Mittelpunkt der Diagonale AC.
   a) Ermittle in einem geeigneten Koordinatensystem die Lage des Höhenschnittpunkts H des Dreiecks ΔEMP!
   b) Zeige, die Normalprojektion H_2 von H in die Seitenfläche ABCD des Würfels auf der Diagonale AC liegt. Verifiziere ferner, dass die Länge der Strecke HH_2 gleich ¼ der Würfelkantenlänge beträgt!

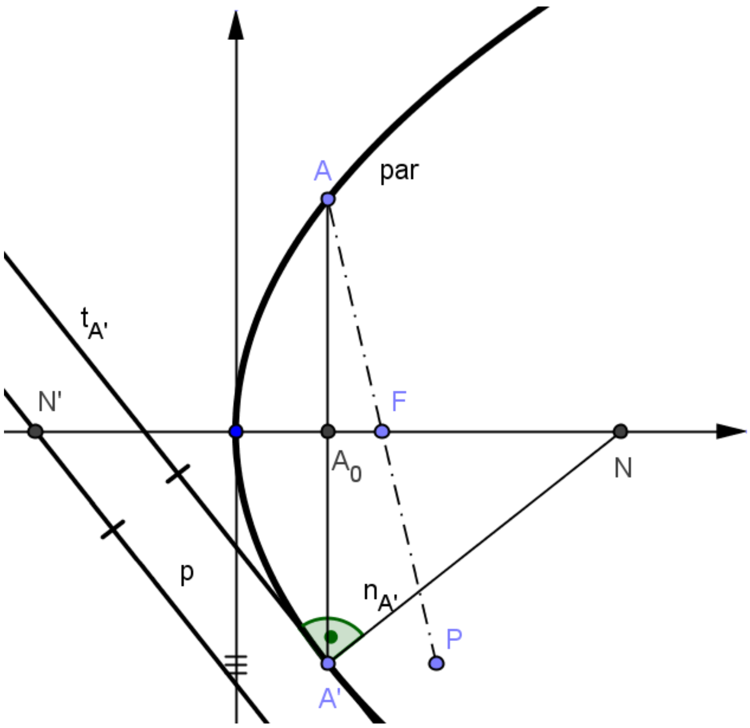


11) Siehe Aufgabe 9a), wobei E durch den Spiegelpunkt Q von E an F ersetzt wird und der Würfel eine Seitenlänge von 156 aufweist!

12) Siehe Aufgabe 10a), wobei E durch den Spiegelpunkt Q von E an F ersetzt wird und der Würfel eine Seitenlänge von 78 aufweist!

13) Siehe Aufgabe 11), wobei Q durch den Spiegelpunkt R von E an Q ersetzt wird und der Würfel eine Seitenlänge von 24 aufweist!

14) Siehe Aufgabe 12), wobei Q durch den Spiegelpunkt R von E an Q ersetzt wird und der Würfel eine Seitenlänge von 12 aufweist!



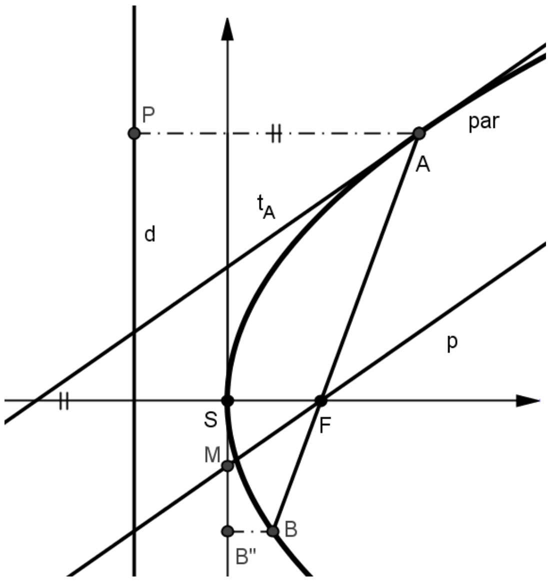
15) Verifiziere anhand der linken Abbildung die folgende Polarenkonstruktion des Spiegelpunkts P eines Parabelpunkts A am Brennpunkt F für einen selbst gewählten Punkt A:
- ➢ Spiegelpunkt A´ von A an der Parabelachse
- ➢ Schnittpunkt N von $n_{A´}$ mit der Parabelachse
- ➢ Spiegelpunkt N´ von N am Parabelbrennpunkt F
- ➢ Spiegelpunkt F´ von F am Parabelscheitel S

Dann ist die Parallele p zu $t_{A´}$ durch N´ die Polare p von P bezüglich par.

16) Verifiziere anhand der rechten Abbildung die folgende Polarenkonstruktion der Normalprojektion P eines Parabelpunkts A auf die Direktrix d, und zwar für A(1296|432)!

- Schnittpunkt B des Brennstrahls AF mit par
- Normalprojektion B´´ von B auf die Scheiteltangente
- Mittelpunkt M der Strecke B´´S

Dann ist die Parallele p zur Tangente t_A durch M die Polare von P bezüglich par.

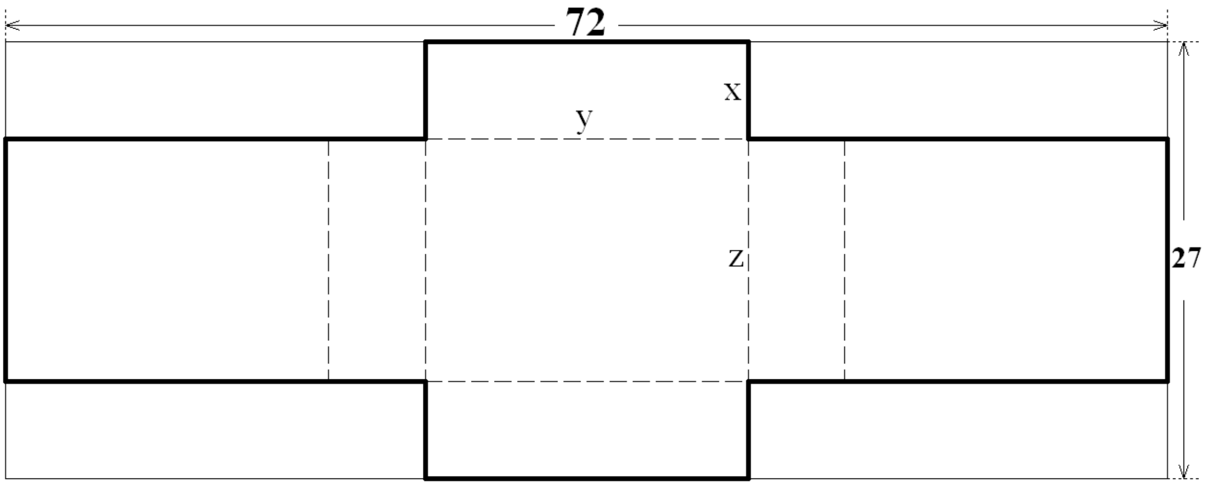


17) Aus einem 72cm langen und 27cm breiten Rechteck soll das Netz des volumsgrößten Quaders mit Doppeldeckel gewonnen werden.

a) Berechne die sich aus dieser Forderung ergebenden Werte für die Länge, Breite und Höhe des Quaders (siehe Abbildung), wobei das Maximum nachzuweisen ist!

b) Wie groß ist das maximal erreichbare Volumen?

c) Begründe ohne Verwendung des Taschenrechners, dass der Abfall weniger als $\frac{1}{3}$ beträgt!



18) Schachtelproblem: Eine komplette Verstärkung einer der beiden kleineren Mantelwände durch Verwendung des Abfalls ist möglich, jedoch reicht es nie ganz für eine Verstärkung aller beiden kleineren Mantelwände, denn: Bei Länge a und Breite b bleiben nach einer Wand zwar immer noch $\Delta = \frac{2a^2+b^2}{6} - (2a+b)\cdot\sqrt{\wp}$ Flächeneinheiten übrig, wobei $\wp$ die Diskriminante jener NORMIERTEN quadratischen Gleichung bezeichnet, welche beim Nullsetzen der ersten Ableitung der entsprechenden Zielfunktion entsteht, für eine zweite Wand fehlen aber noch $\Delta' = \frac{2}{3}\cdot(4a+b)\cdot\sqrt{\wp} - \frac{4a^2-ab+b^2}{9}$ Flächeneinheiten. Überprüfe dies für a=957 und b=120!

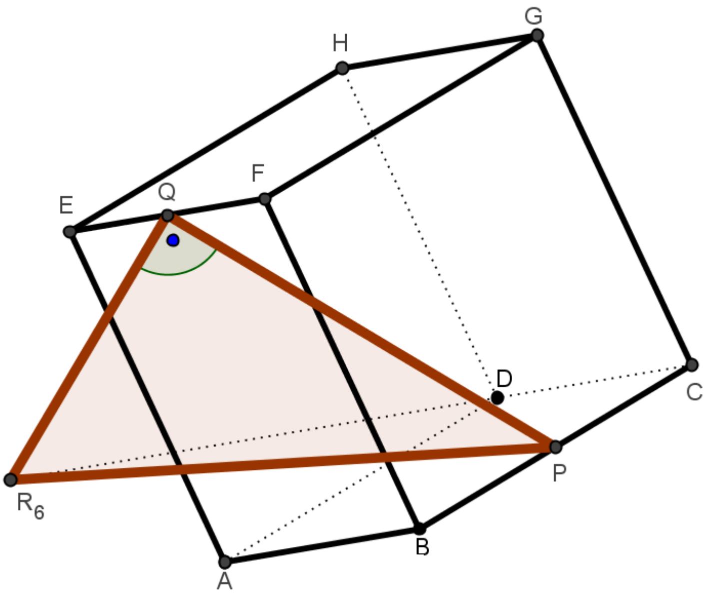
19) In jeder der folgenden drei Abbildungen sind P und Q Kantenmittelpunkte. Der dritte Eckpunkt R_k $(6 \leq k \leq 8)$ des Dreiecks ΔPQR_k liegt jeweils derart auf der Trägergerade einer Kante bzw. Raumdiagonale des Würfels, dass das Dreieck ΔPQR_k rechtwinklig mit der Hypotenuse PR_k ist, wobei der Würfel eine Kantenlänge von 8 aufweist.

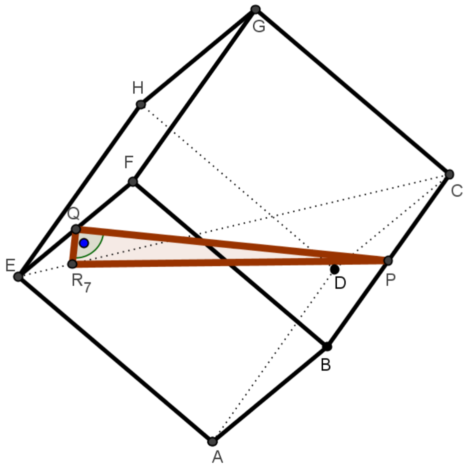
a) Berechne die Koordinaten von R_6 in einem geeigneten selbst zu wählenden Koordinatensystem!

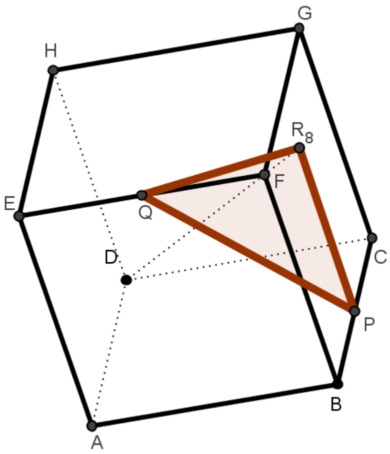
b) Berechne die Koordinaten von R_7 im selben Koordinatensystem wie in Aufgabenteil a)!

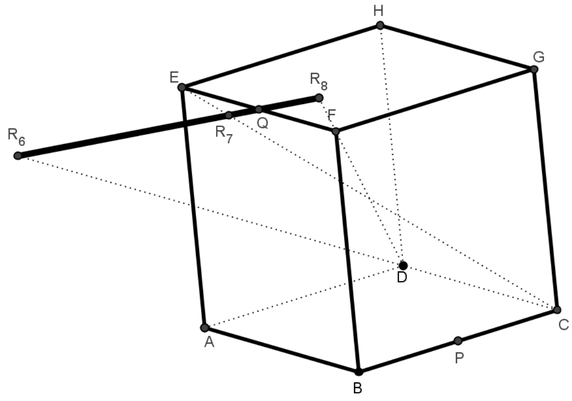
c) Berechne die Koordinaten von R_8 im selben Koordinatensystem wie in Aufgabenteil a)!

d) Zeige, dass R_6, R_7, R_8 und Q kollinear liegen und gib die relative Lage jeweils als Teilverhältnis an (vgl. vierte Abbildung!)!









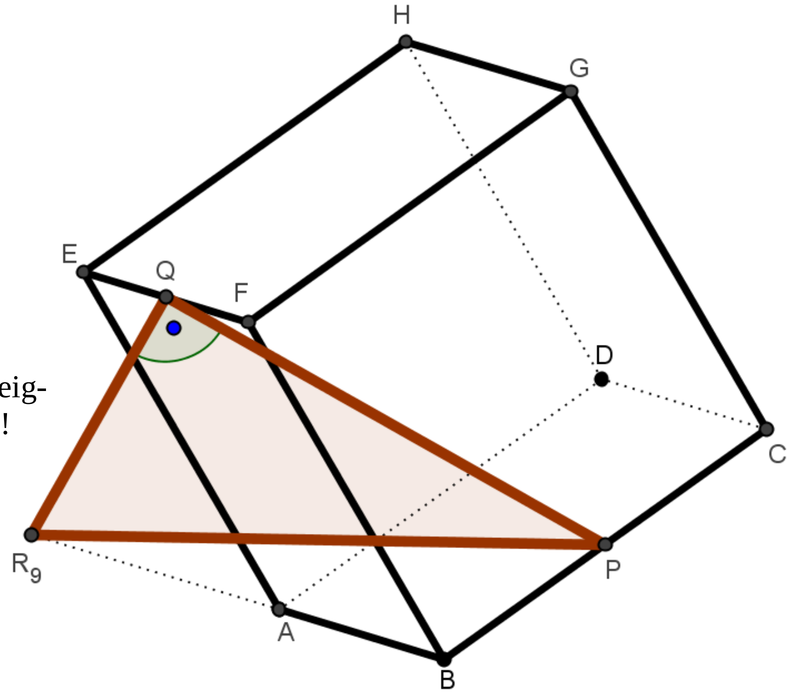
20) In jeder der folgenden drei Abbildungen sind P und Q Kantenmittelpunkte. Der dritte Eckpunkt R_k ($9 \leq k \leq 11$) des Dreiecks ΔPQR_k liegt jeweils derart auf der Trägergerade einer Kante des Würfels, dass das Dreieck ΔPQR_k rechtwinklig mit der Hypotenuse PR_k ist, wobei der Würfel eine Kantenlänge von 4 aufweist.

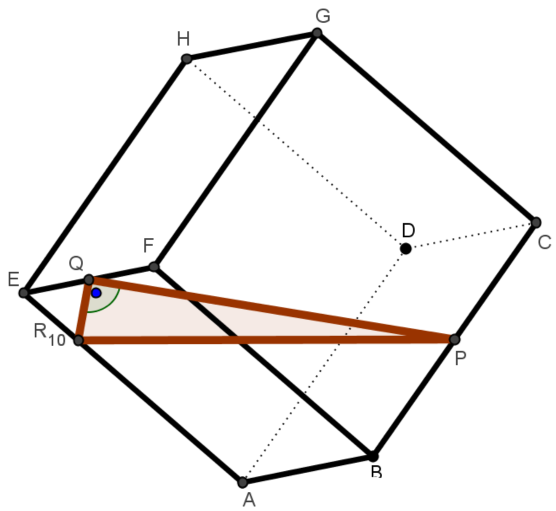
a) Berechne die Koordinaten von R_9 in einem geeigneten selbst zu wählenden Koordinatensystem!

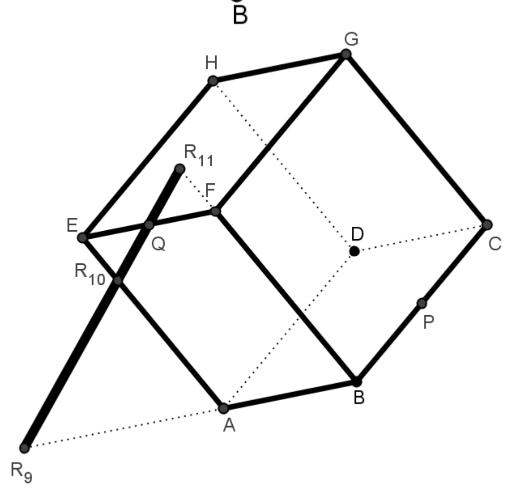
b) Berechne die Koordinaten von R_{10} im selben Koordinatensystem wie in Aufgabenteil a)!

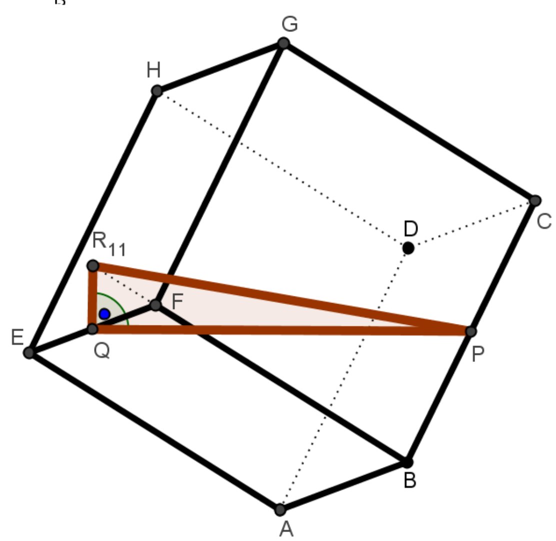
c) Berechne die Koordinaten von R_{11} im selben Koordinatensystem wie in Aufgabenteil a)!

d) Zeige, dass R_9, R_{10}, R_{11} und Q kollinear liegen und gib die relative Lage jeweils als Teilverhältnis an (vgl. vierte Abbildung!)!









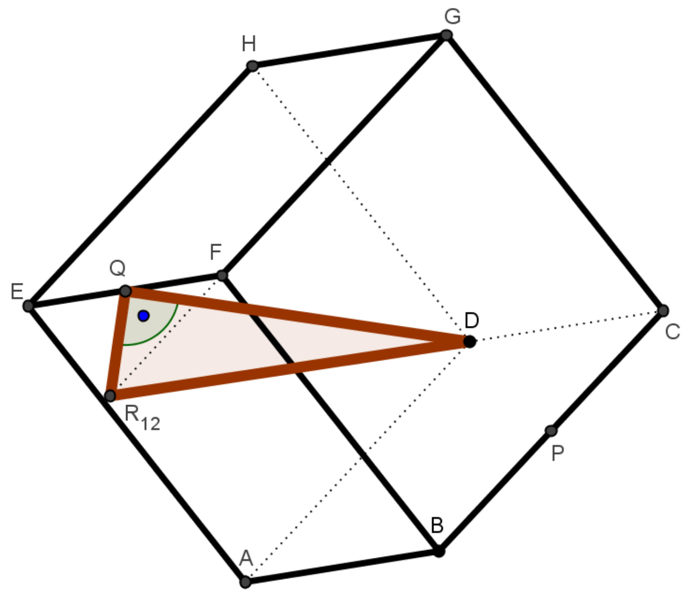
21) In jeder der folgenden drei Abbildungen sind P und Q Kantenmittelpunkte. Der dritte Eckpunkt R_k ($12 \le k \le 14$) des Dreiecks ΔPQR_k liegt jeweils derart auf der Trägergerade einer Kante des Würfels, dass das Dreieck ΔPQR_k rechtwinklig mit der Hypotenuse PR_k ist, wobei der Würfel eine Kantenlänge von 2 aufweist.

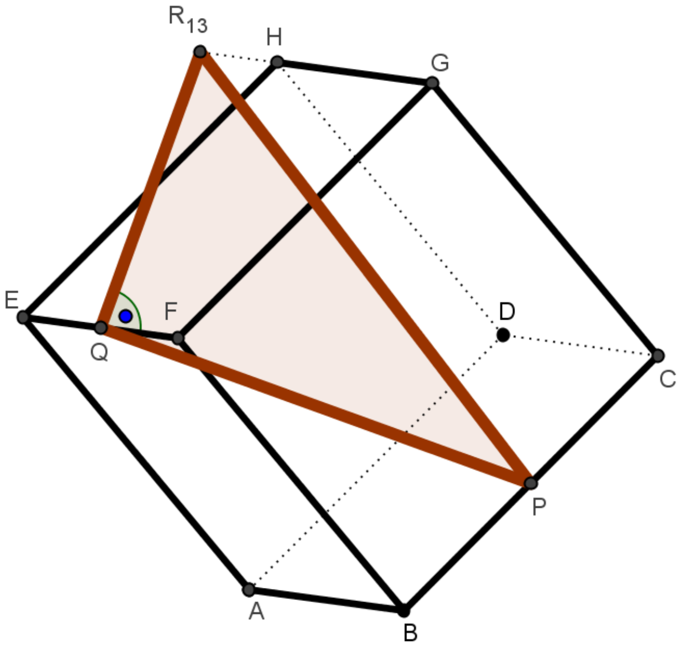
a) Berechne die Koordinaten von R_{12} in einem geeigneten selbst zu wählenden Koordinatensystem!

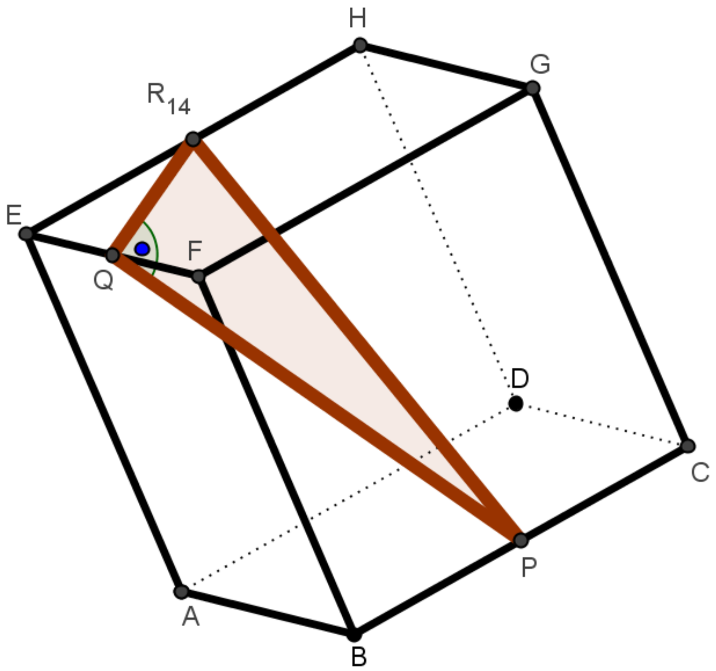
b) Berechne die Koordinaten von R_{13} im selben Koordinatensystem wie in Aufgabenteil a)!

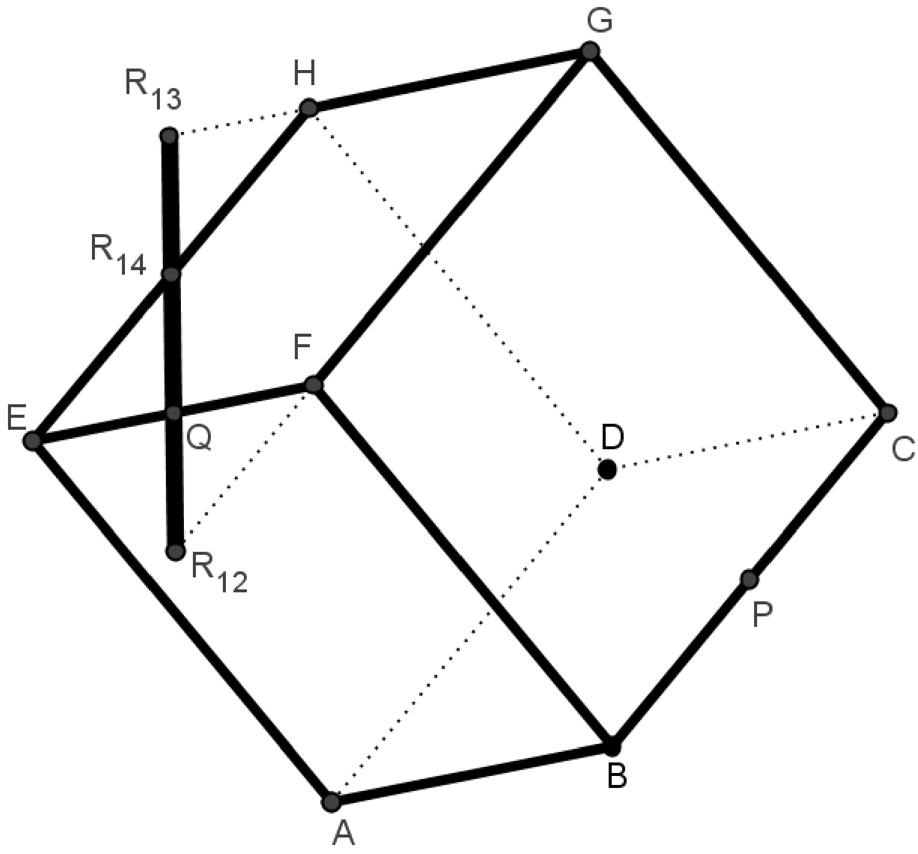
c) Berechne die Koordinaten von R_{14} im selben Koordinatensystem wie in Aufgabenteil a)!

d) Zeige, dass R_{12}, R_{13}, R_{14} und Q kollinear liegen und gib die relative Lage jeweils als Teilverhältnis an (vgl. vierte Abbildung!)!



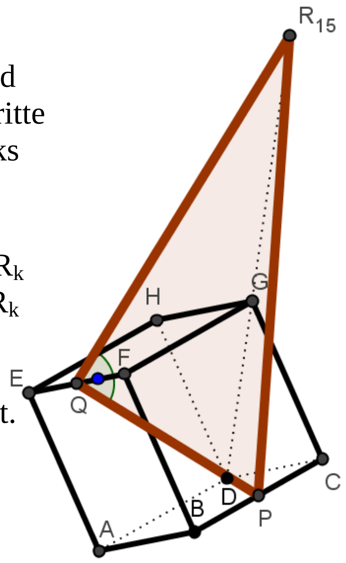


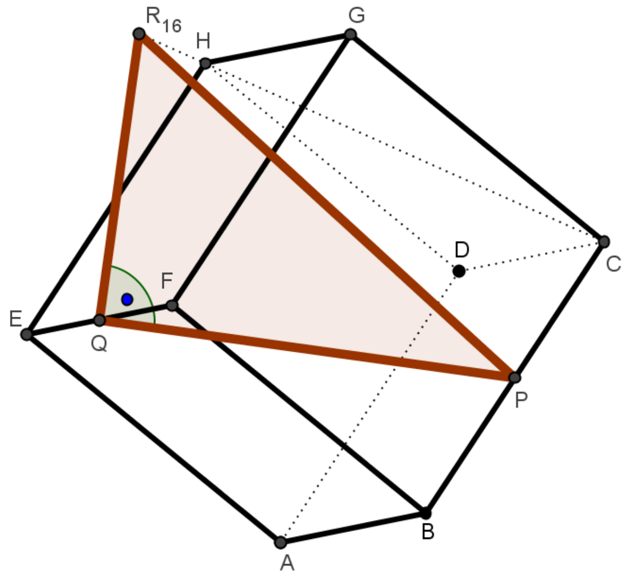




22) und 23):

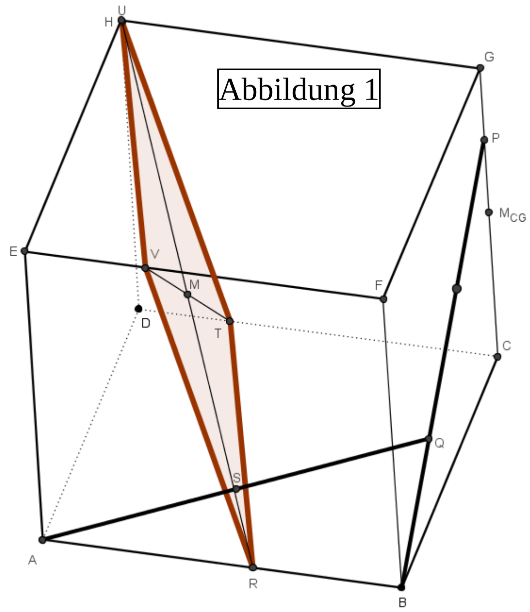
In jeder der beiden Abbildungen sind P und Q Kantenmittelpunkte. Der dritte Eckpunkt R_k ($15 \leq k \leq 16$) des Dreiecks ΔPQR_k liegt jeweils derart auf der Trägergerade einer Flächediagonale des Würfels, dass das Dreieck ΔPQR_k rechtwinklig mit der Hypotenuse PR_k ist, wobei der Würfel eine Kantenlänge von 2 (Abbildung mit R_{15}) bzw. 6 (Abbildung mit R_{16}) aufweist.





24) bis 27) bereits aus einem Übungsprogramm für 2013/14:

Ein Vorgeschmack auf die Wiederholung/Vertiefung des Kapitels "Analytische RAUMGEOMETRIE" 8B(G), Schuljahr 2013/14, Dr. R. Resel



24) Zu Abbildung 1: Der Würfel in Abbildung 1 weist eine Seitenlänge von 288 auf. M_{CG} ist der Mittelpunkt der Würfelkante CG, P ist der Mittelpunkt der Strecke $M_{CG}G$. Der Punkt Q entsteht durch Drittelung der Strecke BP. Die Symmetrieebene σ_{AQ} schneidet (wie sich zeigen lässt) nur die Würfelkanten AB, CD, GH und EF, und zwar in den Punkten R, T, U und V.

a) Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte R, T, U und V und begründe ohne Taschenrechner, dass es sich beim Viereck RTUV um ein Parallelogramm, aber keine Raute handelt.

b) Gloria und Omar (Remember: Genie-DG-Gruppe) meinen, dass es sich aber „fast" um eine Raute handelt und behaupten, dass die Winkel zwischen den Diagonalen nur um knapp 1°17´7´´ von einem rechten Winkel abweichen. Überprüfe diese Behauptung deiner/s Schulkolleg/innen!

c) Berechne den Flächeninhalt der Raute und zeige ohne Taschenrechner, dass dieser um ein Zwölftel größer ist als jener jedes einzelnen Begrenzungsquadrats des Würfels.

d) Die Genie-DG-Gruppe behauptet, dass der Schnittpunkt S von g_{AQ} mit σ_{AQ} auf der Diagonale RU liegt und die Strecke RM im Verhältnis 1:2 teilt. Kontrolliere, ob dies in der Tat zutrifft!

25) Zu Abbildung 2: Der Würfel in Abbildung 2 weist eine Seitenlänge von 2 auf. W, Q, M_1 und M_2 sind Kantenmittelpunkte, R bzw. T entsteht durch Spiegelung von M_1 an A bzw. von M_2 an G. Der Punkt S geht durch Spiegelung von C an B hervor.

a) Stelle Gleichungen der Ebenen ε_{AWQ} und ε_{RST} auf und zeige, dass sie zueinander parallel verlaufen.

b) Setze die Flächeninhalt der Dreiecke ΔAWQ und ΔRST in ein möglichst einfaches ganzzahliges Verhältnis!

Abbildung 2

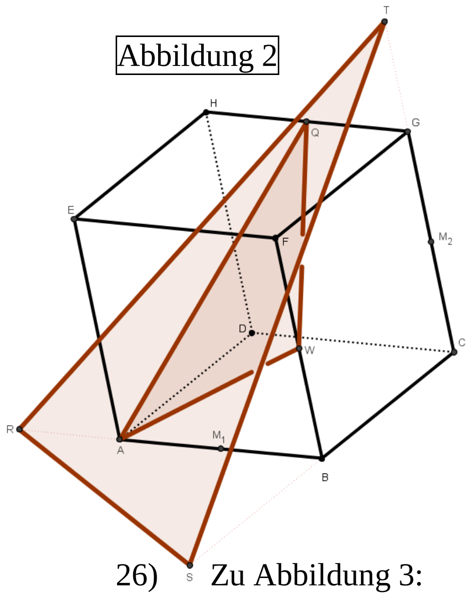
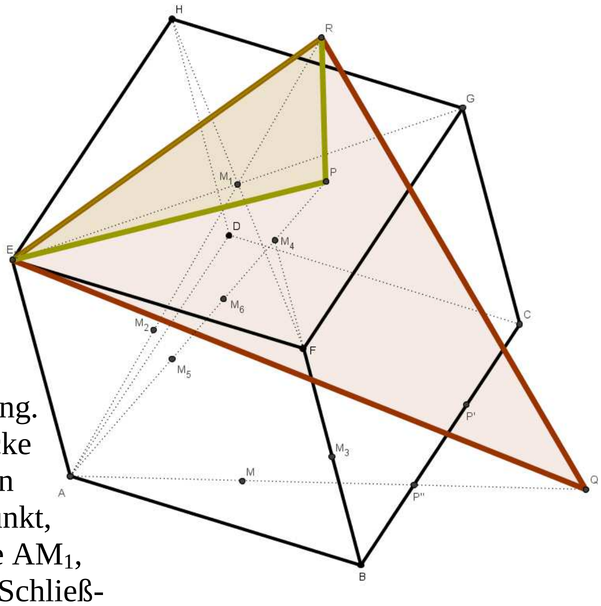


Abbildung 3



26) Zu Abbildung 3: Der Würfel in Abbildung 3 weist eine Seitenlänge von 24 auf. Die Punkte P´ und P´´ entstehen durch Kantendrittelung. M ist der Mittelpunkt der Strecke AP´´, Q dessen Spiegelpunkt an P´´. M_1 ist ein Flächenmittelpunkt, M_2 der Mittelpunkt der Strecke AM_1, R dessen Spiegelpunkt an M_1. Schließlich ist M_3 der Mittelpunkt der Würfelkante BF, M_4 dessen Spiegelpunkt an F, M_5 der Mittelpunkt der Strecke AM_4, M_6 der Mittelpunkt der Strecke M_4M_5 und schlussendlich P der Spiegelpunkt von M_6 an M_4. Zeige, dass die Ebenen ε_{EQR} und ε_{EPR} aufeinander normal stehen!

27) # Stochastik in der 8B*, 2013/14, Dr. Resel

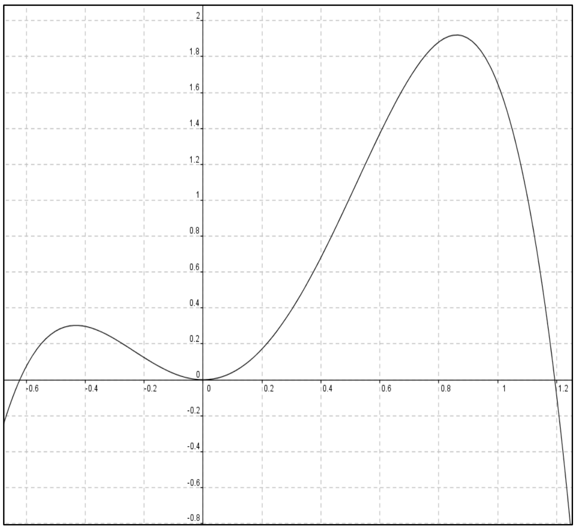
Die strahlende Peer-Mediatorin Julie (links im Rahmen einer ohne Frage äußerst verdienten Ehrung ihrer Tätigkeit während des zehnjährigen Jubiläums ihrer Schule, die freilich auch ihrer „Peer-group“ galt) pflegt Konflikte anderer Schüler äußerst effektiv und auch durchaus rasch zu lösen. Wenn z.B. – siehe Abbildung Mitte! – „Sandra 89“ aus der 1C „Mr. 1968“ aka „Tom Crownburger“ aus ihrer Klasse als „Burli“ bezeichnet, dieser aber sich selbst als „g´standendes Mannsbild“ sieht, sind Streitereien vorprogrammiert, was dann Julie aka "Frl. Ba(mfor)d" (Klammer gilt nur, wenn sie wütend wird!☺☺☺) auf den Plan ruft. Die Jungmathematikerin ***"Glouii Worisrol"*** (ganz rechts auf einem ca. sieben Jahre alten Foto☺) hat Julies Peer-Tätigkeit durch eine professionelle stochastische Analyse quantifiziert, was zu folgendem Modell führte: Die in Bamford-Einheiten (Abkürzung „BE“, wobei eine „BE“ exakt 74 Minuten entspricht**) gemessene Konfliktlösungsdauer ist als stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega=[0;1]$ nach der Dichtefunktion mit der Funktionsgleichung $\varphi(x) = \frac{420}{37}\cdot x^3\cdot(x-1)^2\cdot(7-3x)$ verteilt.

Zeige, dass φ tatsächlich Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariable X ist, berechne den Erwartungswert μ sowie die Standardabweichung σ (jedoch bitte schon in gewöhnlichen Minuten!) und nimm Stellung zu "**G l o u i i**" **s** folgender σ -Regel: **P(|X–μ|<σ)=65%**

* gymnasialer Teil!

** Der Grund für die Einführung gerade dieser Einheit ist Julies Peer-Sprechstunde von 10:00:30 bis 11:14:30. Von der Rk-Stunde bei Prof. W. von 9:10:00 bis 10:00:00 bzw. von der M-Stunde bei Prof. R. will sie ja keinesfalls etwas versäumen, und 30 Sekunden braucht sie schon für den Raumwechsel, schließlich ist sie ja nicht mehr so jung wie die von ihr „gebamforde(r)ten“ Streithanseln und –innen!

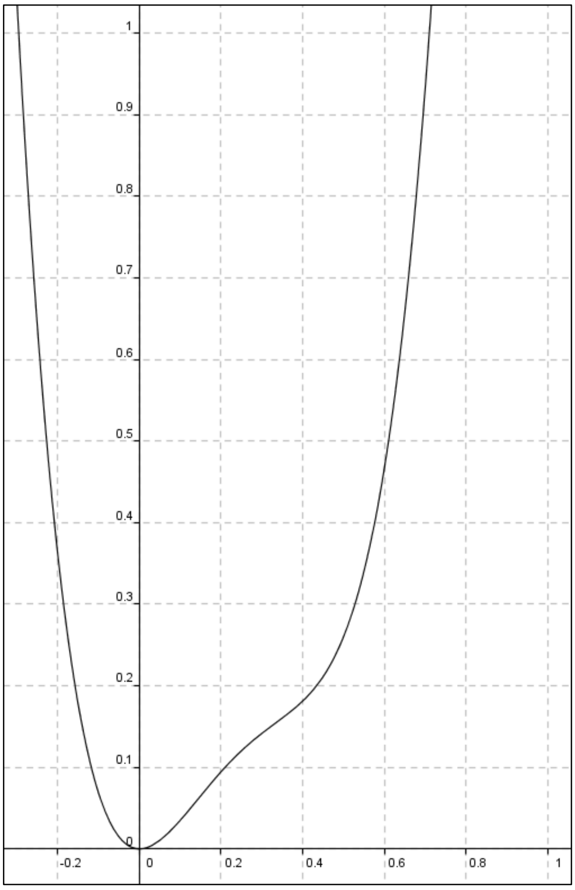
28) Erste Fortsetzung von Aufgabe 27):



Alexandra hat Lara (btw: Alexandra Maria Lara, dt. Schauspielerin, geb. 1978) bzgl. Ihrer Peer-Tätigkeit ebenso beobachtet wie Glouii in Aufgabe 33) zuvor Julie, Resultat von Alexandras Bemühungen ist die Dichtefunktion φ mit der Funktionsgleichung $\varphi(x)=0.15\cdot(-35x^4+20x^3+26x^2)$ mit dem Ereignisraum Ω=[0;1], wobei die Einheit hier exakt eine Stunde ist (Laras Sprechstunde findet von 10.10 bis 11.10 statt.). Zeige, dass φ tatsächlich Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariable X ist (Verwende für deine Argumentation auch die linke Abbildung, deren Richtigkeit du auch nachweisen sollst! Was lässt sich daraus ferner ablesen?), berechne den Erwartungswert μ sowie die Standardabweichung σ und nimm Stellung zu Alexandras folgender σ-Regel:

$$\boxed{P(|X-\mu|<\sigma)=\frac{9}{14}}$$

29) Zweite Fortsetzung von Aufgabe 27):



Nun tauschen Alexandra und Lara die Rollen, was bei gleichbleibendem Ereignisraum Laras Dichtefunktion φ mit der angegebenen Funktionsgleichung liefert.

$$\boxed{\varphi(x)=\frac{5}{6}\cdot\left(21x^4-20x^3+6x^2\right)}$$

Zeige, dass φ tatsächlich Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariable X ist

$$\boxed{P(|X-\mu|<\sigma)=\frac{33}{38}}$$

(Verwende für deine Argumentation auch die linke Abbildung, deren Richtigkeit du auch nachweisen sollst! Was lässt sich daraus ferner ablesen und warum ist es nicht besonders wichtig, exakt zu sehen, wie der Graph von φ ab ca. 0,7 weiterverläuft? Begründe!) und berechne sowohl den Erwartungswert μ als auch die Standardabweichung

Nimm ferner Stellung zu Laras o b i g e r σ - R e g e l !

P.S.: Auch Alexandras Sprechstunde findet von 10.10 bis 11.10 statt!

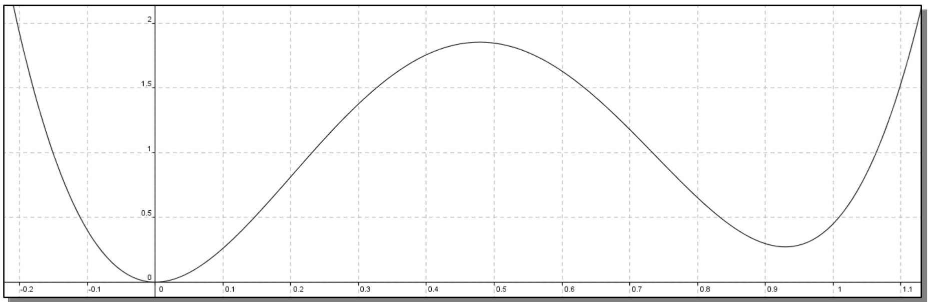
30) Wie 28), nur dass Alexandra nun Lenas Tätigkeit statistisch ausgewertet hat und bei gleichbleibendem Ereignisraum Alexandra eine **neue** Dichtefunktion φ mit der $\boxed{\text{angegebenen Funktionsgleichung}}$ erhält, aber dennoch an der "alten" σ-Regel

$$\boxed{P(|X-\mu|<\sigma)=\frac{9}{14}}$$

festhält. Kommentiere dies und vergleiche die Modelle aus dieser Aufgabe und Aufgabe 32) miteinander (auch im Hinblick auf die Gestalt des Graphen von φ!).

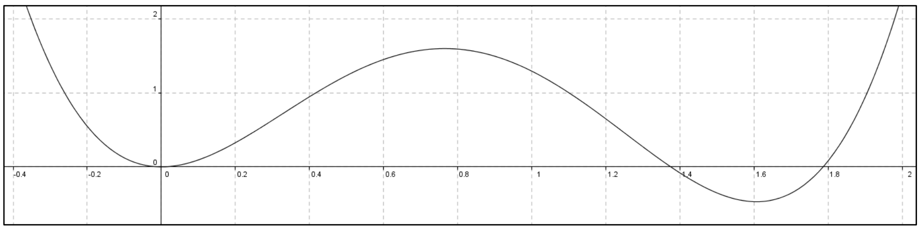
$$\boxed{\varphi(x)=\frac{1}{15}\cdot\left(-105x^4+40x^3+78x^2\right)}$$

31) Jetzt untersucht Lena Alexandras Tätigkeit und stößt bei gleichbleibendem Ereignisraum im Rahmen ihrer stochastischen Analyse auf die Dichtefunktion φ mit der Funktionsgleichung $\varphi(x)=0.15\cdot(245x^4-460x^3+218x^2)$.



Weise nach, dass es sich tatsächlich um eine Dichtefunktion handelt, erläutere den obigen Funktionsgraphenverlauf (Begründe auch die Richtigkeit der Darstellung! Was lässt sich ferner daraus ablesen?) und nimm Stellung zu Lenas σ-Regel $P(|X-\mu|<\sigma)=66\%$!

32) Nun hat Dave Alexandras Tätigkeit analysiert und stieß bei gleichbleibendem Ereignisraum im Rahmen seiner stochastischen Analyse auf die Dichtefunktion φ mit der Funktionsgleichung



$\varphi(x)=\frac{1}{24}\cdot\left(105x^4-332x^3+258x^2\right)$. Weise nach, dass es sich tatsächlich um eine Dichtefunktion handelt, erläutere den obigen Funktionsgraphenverlauf (Begründe auch die Richtigkeit der Darstellung! Was lässt sich ferner Daraus ablesen?) und nimm Stellung zu Daves σ-Regel $P(|X-\mu|<\sigma)=57/91$!

Gutes Gelingen beim Lösen dieser schönen Aufgaben!

Wien, im November 2012. Dr. R. Resel, eh.