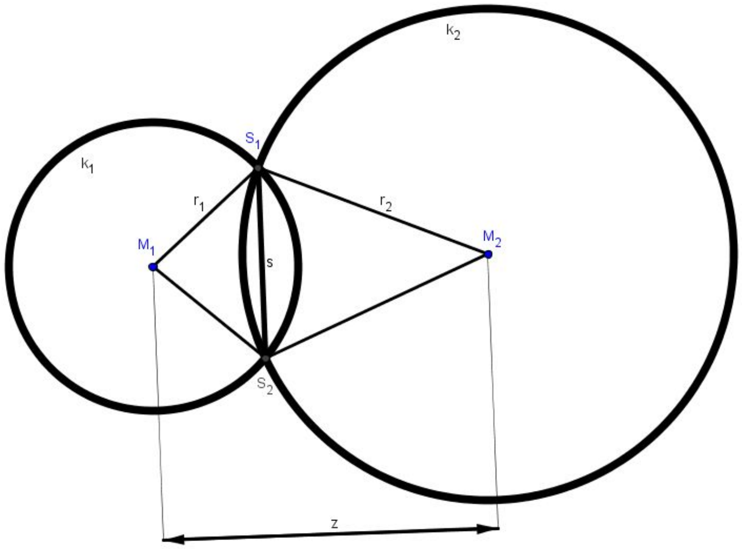
Weitere Übungen zur analytischen Geometrie des Kreises sowohl für die neun Französinnen als natürlich auch die drei Franzosen der "PSK"[1]

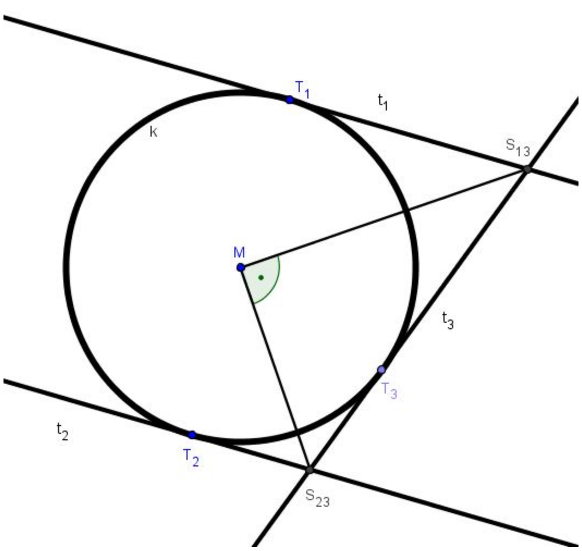


1. Die GENIE-DG[2]-Gruppe hat bezüglich des Schnitts zweier Kreise folgende irre Formel hergeleitet (Bedeutung der Variablen: siehe Abbildung links!): Wähle (a) (wie zuvor die GENIE-DG-Gruppe!) oder (b):

   (a) Beweise diese Formel!

   (b) Kontrolle am konkreten Beispiel der Kreise k_1 und k_2 mit den Gleichungen $k_1 : x^2 + y^2 - 4x + 2y - 2495 = 0$ und $k_2 : x^2 + y^2 - 130x - 166y + 3889 = 0$ erbeten!

$$\boxed{s = \frac{\sqrt{(z+r_1+r_2)(-z+r_1+r_2)(z-r_1+r_2)(z+r_1-r_2)}}{z}}$$

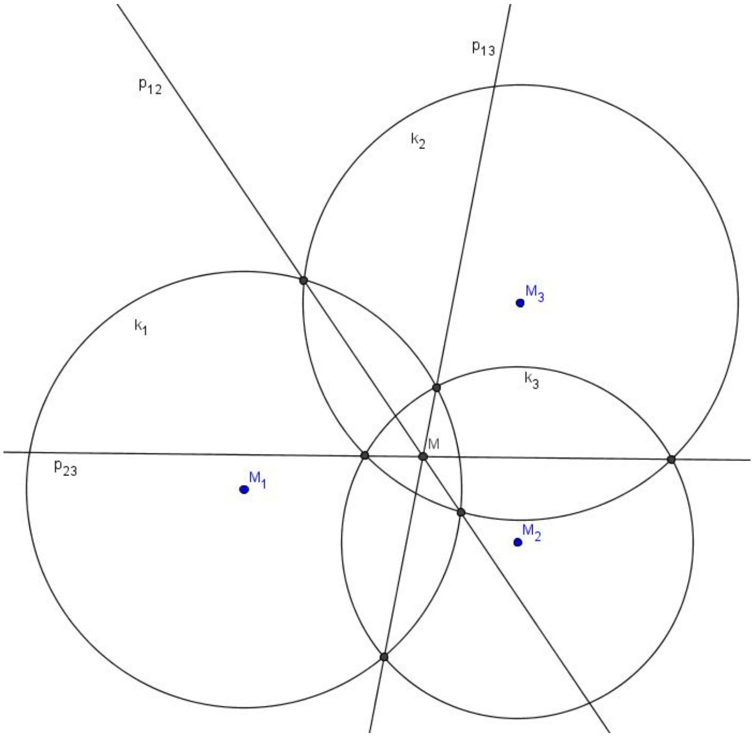


2. Die GENIE-DG-Gruppe hat entdeckt (vgl. linke Abbildung), dass je zwei zueinander parallele Kreistangenten t_1 und t_2 eines Kreises k mit dem Mittelpunkt M jede weitere Kreistangente t_3 derart schneiden, dass die Schnittpunkte zusammen mit M stets ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Kontrolle am konkreten Beispiel des Kreises $k[M(1|2), r = \sqrt{20}]$ erbeten, wobei t_1 und t_2 normal auf die Gerade g mit der Gleichung $g : 2x - y = 4$ stehen und $T_3(x > 0|4)$ gilt.

---

[1] P rof. S ams- K lasse ;-)

[2] Akronym für G LORIA E L(-SHARAWI) N EUERDINGS I NTENSIV E RFORSCHT D IE G EOMETRIE! ;-) Prof. Sams möge mir die an und für sich ja eigentlich schon indiskutable Wortstellung sowie inadäquate Großschreibung verzeihen! :-(



3. Wären wir jetzt in einem der (wie es Barney aus "**himym**" ausdrücken würde) **legendären** Bücher von Wolf HAAS, würde an dieser Stelle der Satz "Jetzt ist schon wieder etwas passiert." folgen, denn ...
... die GENIE-DG-Gruppe hat wieder zugeschlagen und dieses Mal ihrem Namen eine neue/weitere Bedeutung gegeben, schließlich steht ja das Kürzel "DG" auch für *Darstellende Geometrie* [vgl. Realisten-Teil der 7B, Justin (ob Bieber oder Timberlake, das ist hier die Frage! ;-) lässt grüßen!], deren geistiger Urvater niemand Geringerer als der Franzose (und damit der Konnex zur F-Gruppe der 7B!) Gaspard MONGE (1746-1813) ist, der u.a. auch Feldherr unter Napoleon war und aufgrund der angegebenen Lebensdaten schon ca. 200 Jahre vor Gloria und Omar den folgenden beeindruckenden Lehrsatz der Kreisgeometrie entdeckte (und auch bewies!), vgl. auch nebenstehende Abbildung:

Satz von Monge. Schneidet man drei Kreise k_1, k_2 und k_3 paarweise, so gehen die drei Potenzgeraden stets durch einen Punkt M ("MONGE-Punkt").

Überprüfe die Gültigkeit[3] dieses Satzes (schöner formuliert: Verifiziere diesen Satz) an einem selbst gewählten Beispiel dreier Kreise!

4. Wie wir im Unterricht erkannt haben, stellt (u.a.)

$$p : (u_1 - u_2)x + (v_1 - v_2)y = c$$

eine Gleichung der Potenzgerade p zweier Kreise $k_1[M_1(u_1|v_1); r_1]$ und $k_2[M_2(u_2|v_2); r_2]$ dar, wobei die Konstante c auf der rechten Seite dieser Gleichung sowohl von den Koordinaten der Kreismittelpunkte als auch von den Kreisradien abhängt.
Jetzt hat die GENIE-DG-Gruppe herausgefunden, dass k_1 und k_2 genau dann gemeinsame Punkte aufweisen, wenn die Ungleichungskette

$$r_2^2 - r_1 r_2 - \overline{OM_2}^2 + \overrightarrow{OM_1} \cdot \overrightarrow{OM_2} < c < r_2^2 + r_1 r_2 - \overline{OM_2}^2 + \overrightarrow{OM_1} \cdot \overrightarrow{OM_2}$$

gilt.[4]

Verifiziere dies für die beiden Kreise k_1 und k_2 mit den Gleichungen $k_1 : x^2 + y^2 + 14x - 6y - 6 = 0$ und $k_2 : x^2 + y^2 + 8x + 10y + 40 = 0$.

Wien, im September 2012. Dr. R. Resel, eh.

[3]Hiebei ist aber folgender Sonderfall separat zu betrachten (Überlege selbst anhand einer Skizze und verwende dein Wissen über die Lage der Potenzgerade zweier Kreise zu deren Zentrale!): Was passiert, wenn die Mittelpunkte der drei Kreise auf einer Gerade (schöner formuliert: kollinear) liegen?

[4]Die aus obiger Ungleichungskette deutlich werdende Bevorzugung von k_2 stellt keinen zwingenden Umstand dar. Wenn man p durch die alternative Gleichung $p : (u_2 - u_1)x + (v_2 - v_1)y = c'$ beschreibt, ist p genau dann eine Sekante sowohl von k_1 als auch von k_2, wenn die Ungleichungskette $r_1^2 - r_1 r_2 - \overline{OM_1}^2 + \overrightarrow{OM_1} \cdot \overrightarrow{OM_2} < c' < r_1^2 + r_1 r_2 - \overline{OM_1}^2 + \overrightarrow{OM_1} \cdot \overrightarrow{OM_2}$ gilt. Kontrolliere auch dies!