

1. Beim Lösen von Extremwertaufgaben haben wir zwecks Vereinfachung der Zielfunktion neben dem Vernachlässigen konstanter Faktoren drei wichtige Sätze über Ersatzfunktionen formuliert und bewiesen. Zitiere zwei dieser Sätze und leite einen davon detailliert her! **10P.**
2. In der oberen Figur ist der Graph  $\Gamma_f$  der Polynomfunktion  $f$  mit der Funktionsgleichung  $y = f(x) = -x^3 + 6x^2$  zusammen mit seiner positiven Nullstelle  $N$  sowie seinem Hoch- bzw. Wendepunkt  $H$  bzw.  $W$  abgebildet. Dem von  $\Gamma_f$  und der  $x$ -Achse begrenzten Gebiet  $\mathcal{G}$  soll wie in der Figur illustriert das flächeninhaltsgrößte Dreieck einbeschrieben werden. **12P.**
- (a) Berechne die Koordinaten der fehlenden Eckpunkte  $P_x$  und  $P$  des gesuchten optimalen Dreiecks  $\Delta P P_x N$ ! **8P.**
- (b) Mittels Integralrechnung ( $\rightarrow$  8. Klasse) lässt sich zeigen, dass  $\mathcal{G}$  einen Flächeninhalt von 108 aufweist. Zeige, dass das Dreieck aus (a) exakt  $\frac{3}{8}$  des Flächeninhalts von  $\mathcal{G}$  einnimmt! **2P.**
- (c) Verifiziere, dass  $P_x$  genau in der Mitte zwischen  $W_x$  und  $H_x$  liegt (siehe Abbildung)! **2P.**
3. Einem 8 cm langen und 5 cm breiten Rechteck sollen von den Ecken Quadrate der Seitenlänge  $x$  derart weggeschnitten werden, sodass das Netz einer oben offenen quaderförmigen Schachtel mit maximalem Volumen entsteht (siehe mittlere Abbildung!). **12P.**
- (a) Wie groß ist die Einschnitt-Tiefe  $x$  zu wählen? Weise das Vorliegen einer Maximumstelle sowie deren Eindeutigkeit nach! **9P.**
- (b) Verifiziere am konkreten Beispiel, dass für dieses maximale Volumen  $V_{\max}$  dann ausgehend von der Länge  $a$  und der Breite  $b$  des ursprünglichen Rechtecks die schöne Formel  $V_{\max} = \frac{2x}{3} \cdot [ab - (a + b)x]$  gilt. **3P.**
4. In der unteren Figur ist der Graph  $\Gamma_g$  der Polynomfunktion  $g$  mit der Funktionsgleichung  $y = g(x) = x^3 - 6x^2 + 5x$  zusammen mit seiner größten Nullstelle  $N$  und der zugehörigen Tangente  $t_N$  abgebildet. **14P.**
- (a) Ermittle die Koordinaten jenes auf  $\Gamma_g$  liegenden Punkts  $P$ , in dem die Tangente  $t_P$  an  $\Gamma_g$  zu  $t_N$  parallel verläuft. **9P.**
- (b) Berechne die Koordinaten des zweiten gemeinsamen Punkts  $Q$  von  $t_P$  mit  $\Gamma_g$ ! **5P.**

**Notenschlüssel:**

- 00 – 23 Punkte . . . . Nicht genügend  
 24 – 30 Punkte . . . . Genügend  
 31 – 37 Punkte . . . . Befriedigend  
 38 – 43 Punkte . . . . Gut  
 44 – 48 Punkte . . . . Sehr gut

*Gutes Gelingen bei der Präsentation deines algebraischen und geometrischen Wissens und Könnens!*

