Weitere Übungen zur ebenen analytischen Geometrie [5A(G), 2(009/)10]

6*) Verifiziere folgenden elementargeometrischen *Satz* anhand des Dreiecks $\Delta ABC[A(-35|-55), B(65|5), C(-5|65)]$: *Werden in einem Dreieck durch einen Höhenfußpunkt Normale auf die verbleibenden Höhen und Seiten des Dreiecks gelegt, so liegen die vier entstehenden neuen Fußpunkte kollinear.*

Lösungen zu Aufgabe 6: Drei Varianten möglich: Die erste Variante mit $H_a(37/29)$ Liefert die vier Lotfußpunkte $U_1(55/-1)$, $U_2(33/13)$, $U_3(22/20)$ und $U_4(-11/41)$. Bleibt noch zu zeigen, $\boxed{\text{dass } U_1, U_2, U_3 \text{ und } U_4 \text{ auf einer Gerade liegen}}$. Die zweite Variante mit $H_b(-15/25)$ liefert die vier Lotfußpunkte $V_1(15/-25)$, $V_2(13/1)$, $V_3(10/40)$ und $V_4(9/53)$. Bleibt noch zu zeigen, dass V_1, V_2, V_3 und V_4 auf einer Gerade liegen. Die dritte Variante mit $H_c(40/-10)$ liefert die vier Lotfußpunkte $W_1(58/11)$, $W_2(45/10)$, $W_3(19/8)$ und $W_4(-20/5)$. Bleibt noch zu zeigen, dass W_1, W_2, W_3 und W_4 auf einer Gerade liegen. Zeige $\boxed{\text{dies}}$ auf zwei verschiedene Arten!

*: Die Aufgaben 1 bis 5 sind jene des Übungszettels für die 8D (Wiederholung jenes Kapitels für die **<u>nicht-zentrale(!)</u>** Reifeprüfung, welches wir gerade durchnehmen)!

7) Aus dem Archiv (mit Lösungen):

ANALYTISCHE GEOMETRIE DER EBENE [5A(G), 2001/02]

<u>Satz von Wallace</u> (*vgl. nebenstehende Abbildung*!):
Fällt man durch einen Punkt P des Umkreises eines Dreiecks ΔABC Normale auf die Trägergeraden der Dreieckseiten, so liegen die drei dabei entstehenden Fußpunkte F_a, F_b und F_c kollinear, also auf einer Gerade w ("WALLACE-Gerade").

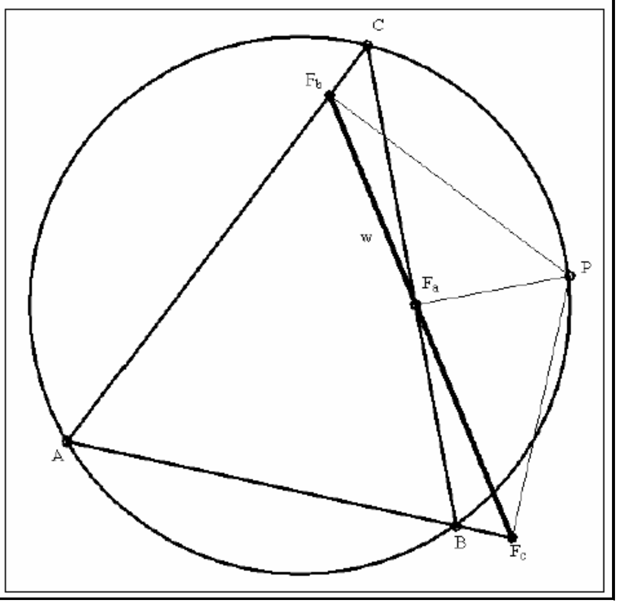
Bestätige diesen Satz anhand des Dreiecks $\Delta ABC[A(-19|-24), B(26|-9), C(16|11)]$ für den Punkt $P(-19|y_P)$, wobei P nicht mit A zusammenfällt!

Lsg.: $U(1|-9)$, $r=25 \Rightarrow y_P=6$, $F_a(11|21)$, $F_b(-4|-9)$, $F_c(-10|-21)$, w: $2x - y = 1$

ZUSATZ (freiwillig als nicht nummerierte HÜ!):

Verifiziere ebenso am vorliegenden Dreieck ΔABC, dass die Verbindungsstrecke von P mit dem Höhenschnittpunkt H des Dreiecks durch die w halbiert wird.

Lsg.: $H(21|-4)$, $g_{HP} \cap w = \{Q\} \Rightarrow Q(1|1), Q = M_{HP}$



8) Chief Simunek spiegelt jeden Eckpunkt eines Dreiecks an dessen Schwerpunkt. Putzi spiegelt den Schwerpunkt des gleichen Dreiecks an allen drei Seitenhalbierungspunkten. Dadurch erhalten beide idente neue Dreiecke. Beweise, dass dies kein Zufall ist und dass dieses neue Dreieck außerdem den gleichen Schwerpunkt als das Ausgangsdreieck hat!

9) Gegeben sind die Punkte A, B, C und P. Nun wird P an A gespiegelt, wobei der Punkt P´ entsteht. Durch Spiegelung von P´ an B entsteht dann P´´ und durch Spiegelung von P´´ an C schließlich P´´´.
Beweise:

a) Spiegelt man P´´´ am Eckpunkt D des Parallelogramms ABCD, so gelangt man wieder zu P zurück.

b) Die Strecke PP´´ ist parallel zur Strecke AB und doppelt so lang als diese.

c) Die Strecke P´P´´´ ist parallel zur Strecke BC und doppelt so lang als diese.

10) Suche im Internet nach dem Satz von VARIGNON, welcher in 10) bewiesen werden soll.

11) Beweise den

<u>Satz von Hiroshi Okumura:</u>
Verbindet man die Mittelpunkte gegenüberliegender Quadrate, welche einem beliebigen Viereck über seinen Seiten nach außen aufgesetzt wurden, so stehen die beiden Strecken aufeinander normal und sind ferner gleich lang.

12) Es gilt folgender *Satz* aus der Elementargeometrie:
Die Streckensymmetrale m_{BC} eines Dreiecks ΔABC schneide die Gerade g_{AC} im Punkt M, die Streckensymmetrale m_{AC} schneide die Gerade g_{AC} im Punkt N. Ist U der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ΔABC, dann liegen die Punkte A, B, M, N und U auf einem Kreis.
Bestätige die Gültigkeit dieses Satzes anhand des Dreiecks ΔABC[A(–39|0), B(9|16), C(–15|40)].

13) In jedem Dreieck ΔABC mit den Höhenfußpunkten H_a, H_b und H_c und dem Umkreismittelpunkt U gilt folgender *Satz* aus der Elementargeometrie:
Die Geraden $\left\{\begin{array}{l} g_{H_bH_c} \text{ und } g_{AU} \\ g_{H_aH_c} \text{ und } g_{BU} \\ g_{H_aH_b} \text{ und } g_{CU} \end{array}\right\}$ *stehen aufeinander normal.*
Zeige die Gültigkeit dieses Satzes anhand des Dreiecks ΔABC[A(3|2), B(63|32), C(23|62)]!

14) Vorgegeben sind die Dreiecke ΔABC[A(1|2), B(5|0), C(4|4)] und ΔA´B´C´[A´(7|14), B´(7|0), C´(14|14)].

a) Zeige, dass die Geraden $g_{AA'}$, $g_{BB'}$ und $g_{CC'}$ einander in einem Punkt schneiden (Voraussetzung des Satzes von DESARGUES).

b) Zeige, dass die Schnittpunkte der Geraden g_{AB} und $g_{A'B'}$, g_{BC} und $g_{B'C'}$ sowie g_{AC} und $g_{A'C'}$ kollinear liegen (Aussage des Satzes von DESARGUES).

15) Vorgegeben sind die Punkte A(2|0), B(3|3), C(5|0), D(8|8), E(4|0) und F(2|2), welche ein überschlagenes Sechseck formieren.

a) Zeige, dass die Eckpunkte dieses Sechsecks abwechselnd auf zwei Geraden liegen (Voraussetzung des Satzes von PASCAL).

b) Zeige, dass die Schnittpunkte der Geraden g_{AB} und g_{DE}, g_{BC} und g_{EF} sowie g_{CD} und g_{AF} kollinear liegen (Aussage des Satzes von PASCAL).

→ Lösungen zu den Aufgaben 12) bis 15) folgen mit den nächsten Übungsaufgaben!