… und noch mehr Übungen zur ebenen analytischen Geometrie [5A(G), 2(009/)10]

18) Vorgegeben ist das Dreieck $\Delta ABC[A(-2|-4), B(22|8), C(6|20)]$.

a) Berechne die Koordinaten von H, H_a, H_b und H_c.

b) Berechne die Koordinaten von U, M_{AB}, M_{BC} und M_{AC}.

c) Berechne die Koordinaten des Umkreismittelpunkts F des "Mittendreiecks" $\Delta M_{AB}M_{BC}M_{AC}$, den Mittelpunkt des sogenannten FEUERBACH-Kreises k_F. Verifiziere, dass $F=\frac{1}{2}\cdot(H+U)$ gilt!

d) Weise am konkreten Beispiel folgenden *"Klassiker"* der Elementargeometrie nach: *Neben M_{AB}, M_{BC} und M_{AC} liegen auf k_F ferner auch noch H_a, H_b und H_c sowie die Mittelpunkte der Strecken AH, BH und CH (weshalb k_F manchmal auch als "Neunpunktekreis" bezeichnet wird).*

19) In jedem Dreieck ΔABC mit den Höhenfußpunkten H_a, H_b und H_c sowie den Seitenhalbierungspunkten M_{AB}, M_{AC} und M_{BC} gelten die Gleichungsketten $\overline{H_aM_{AC}} = \overline{H_cM_{AC}} = \frac{1}{2}\cdot\overline{AC}$, $\overline{H_aM_{AB}} = \overline{H_bM_{AB}} = \frac{1}{2}\cdot\overline{AB}$ und $\overline{H_bM_{BC}} = \overline{H_cM_{BC}} = \frac{1}{2}\cdot\overline{BC}$. Verifiziere dies am konkreten Beispiel des Dreiecks $\Delta ABC[A(3|7), B(83|47), C(73|77)]$!

20) Ein elementargeometrischer *Satz* (Satz von PASCAL) besagt: *Legt man in jedem Eckpunkt eines Dreiecks ΔABC die Tangente an den Umkreis und schneidet sie mit der Trägergerade der gegenüberliegenden Dreieckseite, so liegen die drei entstehenden Schnittpunkte kollinear (PASCALsche Gerade).* Zeige die Gültigkeit dieses Satzes am Beispiel des Dreiecks $\Delta ABC[A(-9|-5), B(5|-5), C(12|16)]$!

21) Verifiziere folgenden elementargeometrischen *Satz* anhand des Dreiecks $\Delta ABC[A(2|-2), B(17|7), C(6|14)]$: *Spiegelt man den Höhenschnittpunkt eines Dreiecks an den Dreieckseiten, so liegen die gespiegelten Punkte auf dem Umkreis des Dreiecks.*

22) Verifiziere folgenden elementargeometrischen *Satz* anhand des Dreiecks $\Delta ABC[A(-4|-5), B(11|-2), C(7|6)]$: *Der Abstand des Umkreismittelpunkts eines Dreiecks von einer Dreieckseite ist halb so groß als der Abstand des Höhenschnittpunkts von dem dieser Seite gegenüberliegenden Eckpunkt.*

23) Gegeben ist das Dreieck $\Delta ACD[A(-40|-19), C(5|-28), D(8|-13)]$.

a) Zeige, dass der Punkt $F(-19|8)$ auf dem Umkreis k dieses Dreiecks liegt.

b) Berechne die fehlenden Koordinaten der auf k liegenden Punkte $B(-4|y_B<0)$ und $E(-4|y_E>0)$.

c) Verifiziere anhand des Sechsecks ABCDEF folgenden elementargeometrischen *Satz* (Satz von PASCAL): *Für jedes einem Kreis[2] einbeschriebenen Sechseck liegen die Schnittpunkte der Trägergeraden gegenüberliegender Sechseckseiten (also AB und DE, BC und EF sowie CD und AF) kollinear (PASCAL-Gerade).*

24) **Satz.** Das Produkt der Längen zweier Dreieckseiten ist gleich dem Produkt aus dem Umkreisdurchmesser und der Höhe auf die dritte Seite.

Kontrolliere die Gültigkeit dieses Satzes anhand des Dreiecks $\Delta ABC[A(-8|-6), B(16|2), C(10|12)$!
Die Berechnung von Höhenfußpunkten kann/soll(!) entfallen, die Verwendung der HESSEschen Abstandsformel bzw. der Vergleich zwischen elementarer und vektorieller (det!!) Flächeninhaltsformel ist nicht zuletzt als Übung zu empfehlen!