Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Bildungsdirektion
Wien

ahs heustadelgasse wien

www.heustadelgasse.at

51. Österreichische Mathematische Olympiade 2020

4 8 vermischte Aufgaben

Kursleiter: Dr. Robert Resel

1. Man beweise für alle positiven reellen Zahlen a, b und c die Ungleichung
$$\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}+\frac{c}{ab}\geq\frac{1}{a}+\frac{a-b+c}{ac}+\frac{1}{c}$$
und untersuche auch den Fall der Gleichheit.

2. Gegeben ist die Zahl $z = 2017^{2018} + 2018^{2017}$.
   (a) Man berechne die Einerziffer von z.
   (b) Man beweise, dass z durch 3 teilbar ist.

3. Von zwei aufeinander folgenden positiven ganzen Zahlen wird einmal das Produkt p und einmal die Summe s gebildet.
   (a) p wird durch s dividiert. Man zeige, dass dabei keine ungerade natürliche Zahl als Quotient entstehen kann.
   (b) Aus p und s wird die Summe z gebildet. Man beweise, dass der Nachfolger von z keine Primzahl sein kann.

4. Man beweise, dass die Ungleichung
$$(1+x+y)^2 \geq (2x+1)(2y+1)$$
für alle reellen Zahlen x und y gilt! Wann gilt Gleichheit?

5. Man beweise für alle reellen Zahlen a und b mit $a > b > 0$ die strikte Ungleichungskette
$$\frac{3}{2}\cdot\left(a^3-b^3-a^2b+ab^2\right) > a^3-b^3 > \frac{3b}{2}\cdot\left(a^2-b^2\right).$$

6. Man bestimme alle Primzahlpaare (p, q), für die
$$\frac{p+q}{p-q}$$
eine ungerade natürliche Zahl ergibt!

7. Man beweise, dass die Ungleichung
$$2x^2 + y^2 + 1 \geq 2x(y+1)$$
für alle reellen Zahlen x und y gilt! Wann gilt Gleichheit?

8. Man zerlege die Summe $x^4 + 2500$ in ein Produkt!

9. Man ermittle alle Lösungen der Gleichung
$$\frac{1}{x+2016} + \frac{1}{x+2017} - \frac{1}{x+2019} - \frac{1}{x+2020} = 0.$$

10. Man ermittle jene natürlichen Zahlen n, für die $n^2 + 2018$ von $n + 2018$ geteilt wird.

11. Man beweise für alle reellen Zahlen x, y und z die Ungleichung
$$(x-y)(x-z) + (y-x)(y-z) + (z-y)(z-x) \geq 0.$$

12. Ein Drachenviereck $\mathcal{D}$ wird in ein Quadrat $\mathcal{F}$ mit gleichem Flächeninhalt und ein Quadrat $\mathcal{U}$ mit gleichem Umfang verwandelt. Die Inkreisradien der Vierecke seien mit $r_{\mathcal{D}}$, $r_{\mathcal{F}}$ und $r_{\mathcal{U}}$ bezeichnet. Man zeige, dass dann $r_{\mathcal{F}}$ das geometrische Mittel aus $r_{\mathcal{D}}$ und $r_{\mathcal{U}}$ ist.

13. Ermittle alle positiven ganzen Zahlen m und n (wobei n ungerade ist), welche der Gleichung
$$\frac{1}{m} + \frac{4}{n} = \frac{1}{12}$$
genügen.

14. Ermittle alle ganzzahligen Lösungspaare (m, n) der Gleichung
$$\left(m^2 + n\right)\left(n^2 + m\right) = (m+n)^3.$$

15. Für $A = \underbrace{4444...4444}_{2n \text{ Ziffern}}$ und $B = \underbrace{8888...8888}_{n \text{ Ziffern}}$ zeige man, dass $A + 2B + 4$ eine Quadratzahl ist.

16. Durch Umstellung der Ziffern einer aus verschiedenen Ziffern zusammengesetzten dreistelligen Zahl z entstehen fünf weitere Zahlen, deren Summe 2003 beträgt. Man ermittle z.

17. Es seien x und y ganze Zahlen mit $x + y \neq 0$. Man bestimme alle Paare (x, y), für die
$$\frac{x^2 + y^2}{x + y} = 10$$
gilt.

18. Gegeben sei ein Quadrat $\square ABCD$. Über der Strecke BC wird nach außen ein gleichseitiges Dreieck ΔBCS errichtet. Der Halbierungspunkt der Strecke AS sei N und der Halbierungspunkt der Seite CD sei H. Beweise: $\measuredangle NHC = 60°$

19. Alice und Bob spielen ein Jahreszahlspiel. Es werden zwei Spielzahlen 19 und 20 und eine Startzahl aus der Menge $\{9, 10\}$ verwendet. Unabhängig voneinander wählt Alice ihre Spielzahl und Bob wählt die Startzahl. Die andere Spielzahl erhält Bob.

    Dann addiert Alice ihre Spielzahl zur Startzahl, zum Ergebnis addiert Bob seine Spielzahl, zum Ergebnis addiert Alice ihre Spielzahl usw. Das Spiel geht so lange, bis die Zahl 2019 erreicht oder überschritten ist.

    Wer die Zahl 2019 erreicht, gewinnt. Wird 2019 überschritten, endet das Spiel unentschieden.

    - Man zeige, dass Bob nicht gewinnen kann.
    - Welche Startzahl muss Bob wählen, um zu verhindern, dass Alice gewinnt?

20. Es seien p, q, r und s vier Primzahlen, für die

$$5 < p < q < r < s < p + 10$$

    gilt. Man beweise, dass die Summe der vier Primzahlen durch 60 teilbar ist.

21. Man ermittle alle von 0 verschiedenen ganzen Zahlen a, b, c und d mit $a > b > c > d$, $ab + cd = 34$ und $ac - bd = 19$.

22. Man ermittle alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung $1 + 1996x + 1998y = xy$.

23. Die positiven ganzen Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 und x_7 erfüllen die Bedingungen $x_6 = 144$ und $x_{n+3} = x_{n+2}(x_{n+1} + x_n)$ für $n = 1, 2, 3, 4$. Man bestimme x_7.

24. Die Lösungen x_1 und x_2 von $x^2 + ax + 1 = b$ seien positive ganze Zahlen. Man beweise, dass dann $a^2 + b^2$ eine zusammengesetzte Zahl ist.

25. Man ermittle alle ganzzahligen Lösungspaare der Gleichung

$$-2x^3 + yx^2 + x^2 - 2x + y + 3 = 0.$$

26. Für die Kathetenlängen a und b sowie die Hypotenusenlänge c eines beliebigen rechtwinkligen Dreiecks beweise man die Ungleichung

$$\left(\frac{c}{a} + \frac{c}{b}\right)^2 > 8.$$

27. Für eine ganze Zahl n seien $A = \sqrt{n^2 + 24}$ und $B = \sqrt{n^2 - 9}$.
    Für welche Werte von n ist $A - B$ eine ganze Zahl?

28. Sei n eine ganze Zahl, sodass $4n + 3$ durch 11 teilbar ist. Man finde die Gestalt von n und den Rest von n^4 bei Division durch 11.

29. Man ermittle alle ganzzahligen Lösungspaare der Gleichung

$$2x^3 - x^2y + 4x^2 - 2xy + 10x - 5y - 4 = 0.$$

30. Man ermittle alle ganzzahligen Lösungspaare der Gleichung

$$x^2 - y^4 = 2009.$$

31. Man ermittle alle Lösungen der Gleichung

$$x + 3 \cdot \{x\} = 17,6.$$

Dabei steht $\{x\}$ für den Nachkommaanteil von x.

32. Man beweise, dass die kleinste natürliche Zahl n im Dezimalsystem mit 2032 Teilern (inkl. der 1 und der Zahl selbst) 41 Stellen aufweist.

33. Aus drei unterschiedlichen Ziffern lassen sich bekanntlich sechs dreistellige Zahlen bilden. Unter S bzw. s verstehen wir die Summe der größten drei bzw. der kleinsten drei dieser sechs Zahlen. Man beweise nun:

    (a) Sowohl S als auch s ist durch 3 teilbar.

    (b) S und s unterscheiden einander um mindestens 396, wobei die Differenz stets durch 198 teilbar ist.

    (c) Die Summe $\sum$ aus S und s ist stets durch 222 teilbar. Welche zahlentheoretische Bedeutung hat der Quotient $\sum : 222$?

34. Man beweise, dass die kleinste natürliche Zahl n im Dezimalsystem mit 2034 Teilern (inkl. der 1 und der Zahl selbst) 38 Stellen aufweist.

35. Es sei ΔABC ein spitzwinkliges Dreieck, M der Mittelpunkt der Seite AC und F auf AB der Fußpunkt der Höhe durch den Eckpunkt C. Man beweise, dass $\overline{AM} = \overline{AF}$ genau dann gilt, wenn $\measuredangle BAC = 60°$.

36. Aus drei benachbarten Ziffern der Menge $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ können sechs dreistellige Zahlen gebildet werden. Unter S bzw. s verstehen wir die Summe der größten drei bzw. der kleinsten drei dieser sechs Zahlen. Man beweise nun, dass der Quotient $\frac{S}{s}$ stets zwischen $\frac{7}{6}$ und $\frac{9}{5}$ liegt und verbessere beide Schranken bestmöglich.

37. Man ermittle alle Lösungen der Gleichung

$$x^2 + \{x\} = 4,51.$$

Dabei steht $\{x\}$ für den Nachkommaanteil von x.

38. E sei jener Punkt auf der Seite CD des Quadrats $\square ABCD$, für welchen

$$\measuredangle BAE = 60°$$

gilt, die Normale n_1 auf AE durch E schneide BC in F, die Normale n_2 auf n_1 durch F schneide AB in G. Man beweise, dass das Trapez $AEFG$ knapp weniger als die Hälfte des Quadrats $\square ABCD$ einnimmt.

39. Berechne ohne Taschenrechner $\dfrac{(10^4+324)\,(22^4+324)\,(34^4+324)\,(46^4+324)\,(58^4+324)}{(4^4+324)\,(16^4+324)\,(28^4+324)\,(40^4+324)\,(52^4+324)}$.

40. Entstehen beim Addieren von 9, 99, ..., $\underbrace{99...9}_{\text{neun Neunen}}$ tatsächlich neun Einsen?

41. Entstehen beim Addieren von 9, 99, ..., $\underbrace{99...9}_{\text{neunundneunzig Neunen}}$ tatsächlich neunundneunzig Einsen?

42. Man überprüfe für kleine natürliche Zahlen

$$\sum_{k=1}^{n} k^5 + \sum_{k=1}^{n} k^7 = 2 \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} k \right)^4$$

und beweise dies mit dem Hinweis

$$u := \sum_{k=1}^{n+1} k, \quad v := u - (n+1), \quad u^4 - v^4 = ...$$

elegant durch vollständige Induktion!

43. In der unteren *Multiplikationstabelle* wurde ein sogenanntes *Gnomon* $\boxed{\text{markiert}}$, welches aus 7 Zahlen besteht. Addiert man von links oben beginnend alle Zahlen aus einem quadratischen Ausschnitt dieser Tabelle, kann man dies mit Gnomonen aus 1, 3, 5, 7, ... Zahlen erreichen. Man leite nun auf diese Weise die verblüffende Identität

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k \right)^2 \quad (*)$$

her.[1]

1	2	3	4	5	6	...
2	4	6	8	10	12	...
3	6	9	12	15	18	...
4	8	12	16	20	24	...
5	10	15	20	25	30	...
6	12	18	24	30	36	...
...	...	...	...	...	...	...

44. Die Gnomone aus der obigen Aufgabe eignen sich nicht nur für eine Herleitung der Formel $(*)$, sondern auch für eine Herleitung einer geschlossenen Darstellung für die Summe $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$, wozu wir die folgende Abbildung betrachten:

1	1	1	1	1	1	...
1	2	2	2	2	2	...
1	2	3	3	3	3	...
1	2	3	4	4	4	...
1	2	3	4	5	5	...
1	2	3	4	5	6	...
...	...	...	...	...	...	...

[1] In den Büchern *20000 Kurven unter der Enveloppe* (2017 in zweiter Auflage im Logos-Verlag erschienen) und *Von der Addition bis zur z-Koordinate* (2017 im Logos-Verlag erschienen) de(ine)s Kursleiters finden sich zahlreiche weitere Möglichkeiten, zur Formel $(*)$ zu gelangen.

Addiert man wiederum von links oben beginnend alle Zahlen aus einem quadratischen Ausschnitt dieser Tabelle, so kann man dies erneut einerseits über Gnomone (in diesem Fall- wie in der obigen Darstellung illustriert - mit gleichen Zahlen) und andererseits wie in der nächsten Abbildung illustriert vornehmen, was unter Verwendung der Gaussschen Formel[2]

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

zur Formel

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

führt.

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\
1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & \ldots \\
1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & \ldots \\
1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 4 & \ldots \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 5 & \ldots \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

45. Welche Vermutung drängt sich aufgrund der folgenden Muster auf? Man beweise diese Vermutung!

$$\begin{aligned}
1 &= 1 \\
8 &= 1 + 7 \\
27 &= 1 + 9 + 17 \\
64 &= 1 + 11 + 21 + 31 \\
125 &= 1 + 13 + 25 + 37 + 49
\end{aligned}$$

46. Man ermittle alle Paare (m, n) natürlicher Zahlen mit

$$\sum_{k=1}^{n} k! = m^2.$$

Hinweis: $\mathrm{EZ}(n!) = 0$ für $n \geq 5$

47. Man beweise auf mindestens zwei Arten:

$$1 + 2^2 + 3 + 4^2 + ... + (2n-1) + (2n)^2 = \frac{n(n+2)(4n+1)}{3}$$

48. Man beweise (unabhängig vom Resultat der vorherigen Aufgabe):

$$3 \mid n(n+2)(4n+1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Gutes Gelingen!

Wien, im Juli 2019. Dr. Robert Resel, eh.

[2] Zusammen mit dieser Formel folgt dann aus $(*)$ die Formel

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$