



## 50. Österreichische Mathematische Olympiade 2019

### Letzte Übungen vor dem Junior-Regionalwettbewerb (18. Juni)

Kursleiter: Dr. Robert Resel

Termin: 17. Juni

Drei internationale Olympiadebeispiele, und zwar aus Großbritannien:

1. Im Dreieck  $\triangle ABC$  sei  $M$  der Mittelpunkt von  $AC$ . Der Kreis  $k$ , der  $BC$  in  $B$  berührt und durch  $M$  geht, schneidet die Gerade  $AB$  zum zweiten Mal im Punkt  $P$ . Beweise:

$$\overline{AB} \cdot \overline{BP} = 2 \cdot \overline{BM}^2$$

2. Für jede positive reelle Zahl  $x$  definieren wir  $\{x\}$  als das Maximum der beiden Zahlen  $x$  und  $\frac{1}{x}$ , wobei  $\{1\} := 1$ . Bestimme alle positiven reellen Zahlen  $y$ , für die

$$5y \cdot \{8y\} \cdot \{25y\} = 1$$

gilt.

3. Die Basis  $BC$  des gleichschenkligen Dreiecks  $\triangle ABC$  ist länger als jeder der beiden Schenkel. Der Punkt  $N$  liegt so auf der Seite  $BC$ , dass  $\overline{BN} = \overline{AB}$  gilt. Die Normale  $n$  auf  $AB$  durch  $N$  schneidet  $AB$  in  $M$ . Beweise, dass die Gerade  $g_{MN}$  sowohl den Flächeninhalt als auch den Umfang des Dreiecks  $\triangle ABC$  halbiert.