



50. Österreichische Mathematische Olympiade 2019

Letzte Übungen vor dem Junior-Regionalwettbewerb (18. Juni)

Kursleiter: Dr. Robert Resel

Termin: 17. Juni

Drei internationale Olympiadebeispiele, und zwar aus Großbritannien:

1. Im Dreieck $\triangle ABC$ sei M der Mittelpunkt von AC . Der Kreis k , der BC in B berührt und durch M geht, schneidet die Gerade AB zum zweiten Mal im Punkt P . Beweise:

$$\overline{AB} \cdot \overline{BP} = 2 \cdot \overline{BM}^2$$

2. Für jede positive reelle Zahl x definieren wir $\{x\}$ als das Maximum der beiden Zahlen x und $\frac{1}{x}$, wobei $\{1\} := 1$. Bestimme alle positiven reellen Zahlen y , für die

$$5y \cdot \{8y\} \cdot \{25y\} = 1$$

gilt.

3. Die Basis BC des gleichschenkligen Dreiecks $\triangle ABC$ ist länger als jeder der beiden Schenkel. Der Punkt N liegt so auf der Seite BC , dass $\overline{BN} = \overline{AB}$ gilt. Die Normale n auf AB durch N schneidet AB in M . Beweise, dass die Gerade g_{MN} sowohl den Flächeninhalt als auch den Umfang des Dreiecks $\triangle ABC$ halbiert.