

Übungsbeispiele für die dreistündige Schularbeit sowie für die schriftliche Matura 8C, 2013/14



Diese Beispiele sollen durch die sowohl für die dreistündige Schularbeit als auch die schriftliche Matura relevanten Stoffgebiete führen, wobei an dieser Stelle mit der

Analytischen Geometrie der Ebene ein

Kapitel der 5. Klasse exemplarisch nochmals aufgerollt wird, und zwar anhand von Aufgaben, deren

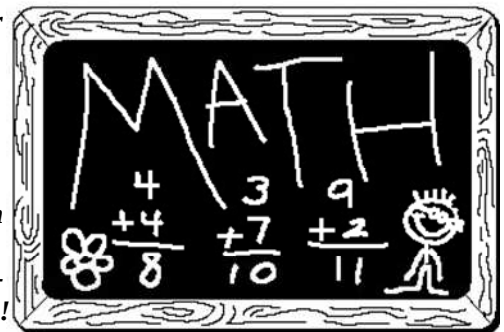
"Bausteine" geradezu

charakteristisch für Matura-beispiele

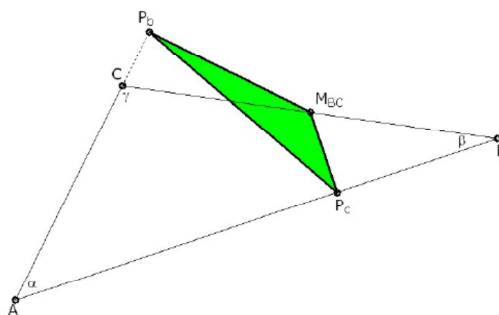
sind.



ACHTUNG! Ein bloßes "Auswendiglernen" der Beispiele ist sicher keine ausreichende Matura- resp. Schularbeitsvorbereitung, da du deine erworbenen Kenntnisse sowohl bei der dreistündigen Schularbeit als auch bei der schriftlichen Matura auf Problemstellungen anzuwenden hast, die zwar nicht gänzlich neuartig, aber zum Teil in der Form wie bei der dreistündigen Schularbeit resp. der schriftlichen Matura gestellt in dieser Aufgabensammlung nicht enthalten sind! Ein eigenständiges Lösen dieser Aufgaben (bis auf jene, die wir in diversen Schulübungen gemeinsam bearbeiten werden) ist eine absolute Notwendigkeit für ein angemessenes Übungsprogramm!



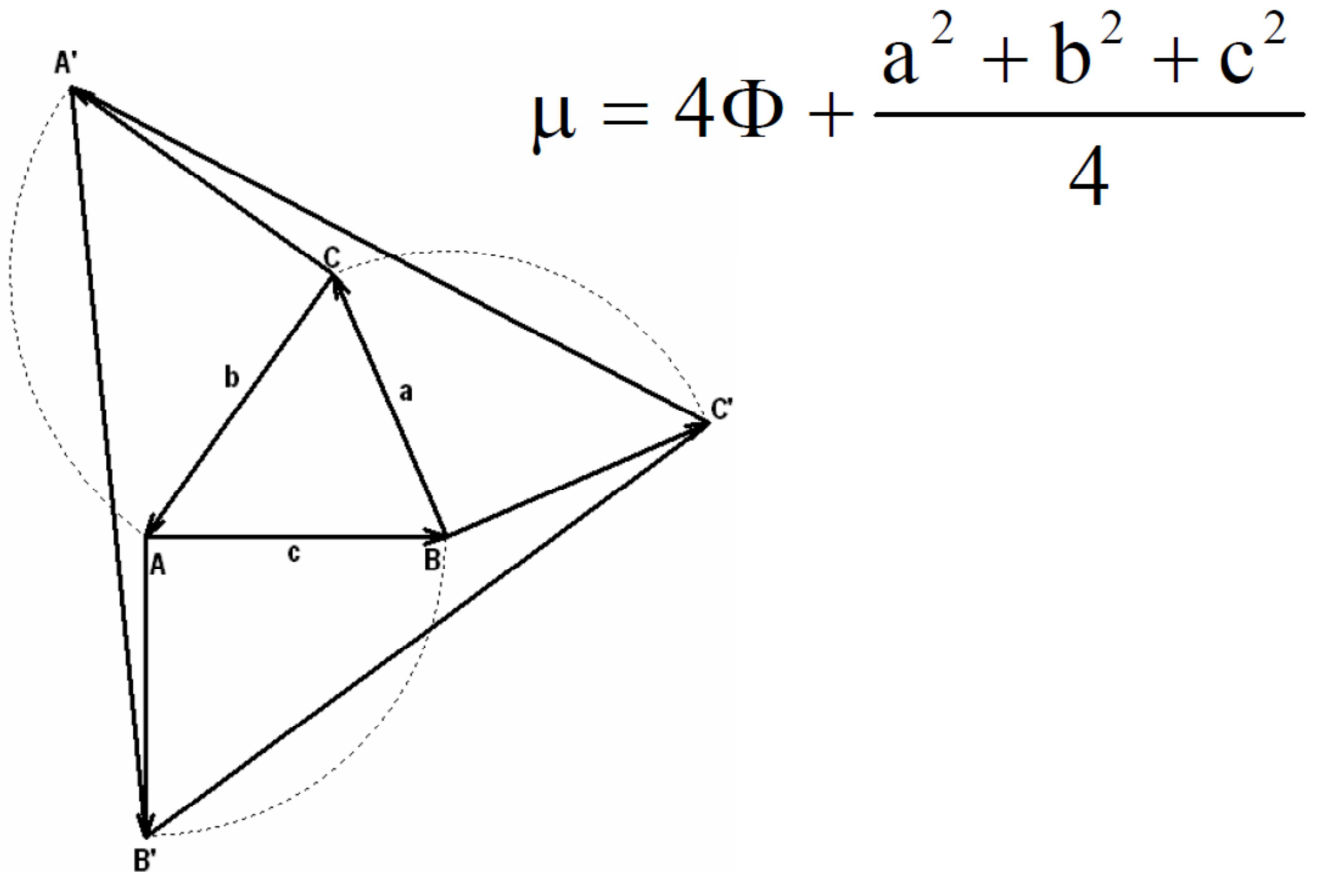
1)



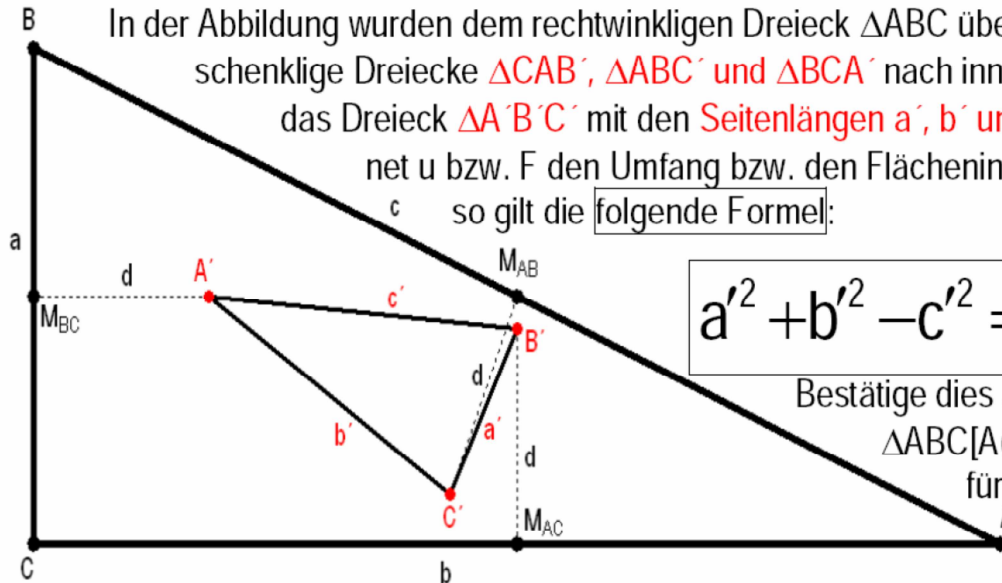
In obiger Figur ist ein Dreieck $\Delta P_C M_{BC} P_b$ abgebildet, das sich wie in der Figur illustriert aus dem Dreieck ΔABC ableitet. Für den Flächeninhalt μ des Dreiecks $\Delta P_C M_{BC} P_b$ gilt dann die Formel $\mu = \frac{a^2}{8} \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma$. Verifiziere dies für das Dreieck $\Delta ABC[A(0|0), B(18|6), C(4|8)]$!

- 2) $\triangle ABC$ sei ein Dreieck mit den Seitenlängen $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ und $c = \overline{AB}$, dem Höhenschnittpunkt H sowie dem Umkreismittelpunkt U . Bezeichnet μ bzw. μ' bzw. μ'' den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$ bzw. $\triangle ABH$ bzw. $\triangle ABU$, dann gilt die Formel $\mu' + 2\mu'' = \mu$. Verifiziere diese Formel für das Dreieck

- 3) Werden die Eckpunkte A , B und C eines Dreiecks $\triangle ABC$ wie in der **unteren Figur** (samt **Beschriftung**!) durch eine 90° -Drehung um einen benachbarten Eckpunkt auf die Punkte A' , B' und C' abgebildet, so gilt für den Flächeninhalt μ des Dreiecks $\triangle A'B'C'$ untenstehende Formel, wobei Φ den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$ bezeichnet. Bestätige diesen Satz für das Dreieck $\triangle ABC[A(0|0), B(8|0), C(5|7)]$.



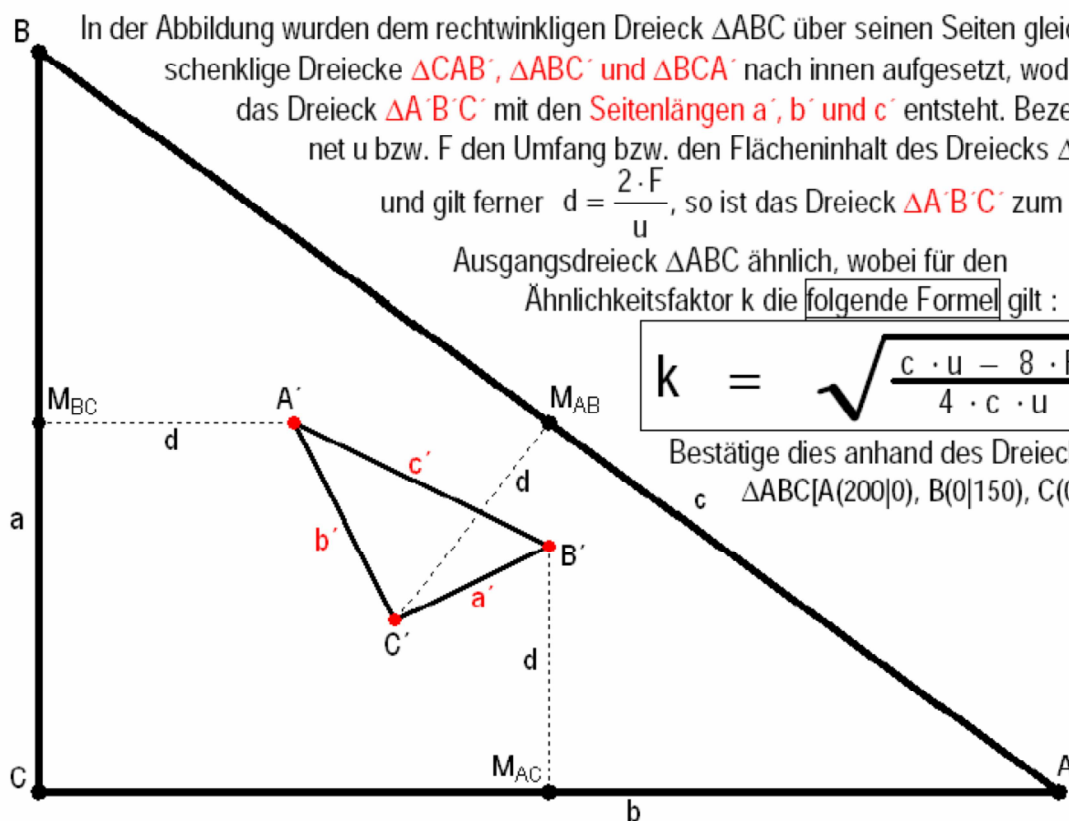
- 4) In der Abbildung wurden dem rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ über seinen Seiten gleichschenklige Dreiecke $\triangle CAB'$, $\triangle ABC'$ und $\triangle BCA'$ nach innen aufgesetzt, wodurch das Dreieck $\triangle A'B'C'$ mit den Seitenlängen a' , b' und c' entsteht. Bezeichnet u bzw. F den Umfang bzw. den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$, so gilt die folgende Formel:



$$a'^2 + b'^2 - c'^2 = \frac{2d}{c} \cdot (d \cdot u - 2 \cdot F)$$

Bestätige dies anhand des Dreiecks $\triangle ABC[A(72|0), B(0|30), C(0|0)]$ für den Wert $d = 13$!

- 5) In der Abbildung wurden dem rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ über seinen Seiten gleichschenklige Dreiecke $\triangle CAB'$, $\triangle ABC'$ und $\triangle BCA'$ nach innen aufgesetzt, wodurch das Dreieck $\triangle A'B'C'$ mit den Seitenlängen a' , b' und c' entsteht. Bezeichnet u bzw. F den Umfang bzw. den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$, und gilt ferner $d = \frac{2 \cdot F}{u}$, so ist das Dreieck $\triangle A'B'C'$ zum Ausgangsdreieck $\triangle ABC$ ähnlich, wobei für den Ähnlichkeitsfaktor k die folgende Formel gilt:



$$k = \sqrt{\frac{c \cdot u - 8 \cdot F}{4 \cdot c \cdot u}}$$

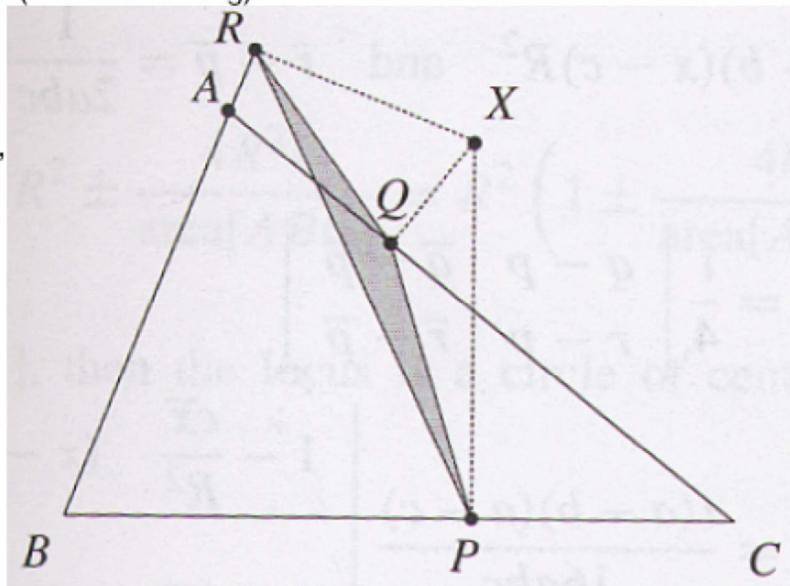
Bestätige dies anhand des Dreiecks $\triangle ABC[A(200|0), B(0|150), C(0|0)]$!

- 6) Projiziert man einen Punkt X auf die Trägergeraden der Seiten eines Dreiecks $\triangle ABC$ mit dem Umkreisradius r und dem Flächeninhalt F , so gilt für den Flächeninhalt F' des aus den projizierten Punkten entstehenden Dreiecks $\triangle PQR$ die nebenstehende Formel, wobei U den Umkreismittelpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$ bezeichnet (siehe Abbildung).

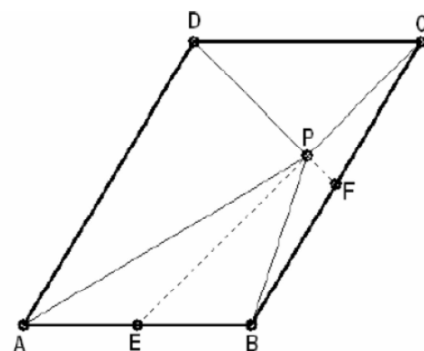
$$F' = \frac{F}{4r^2} \cdot |\overline{UX}^2 - r^2|$$

Verifiziere diesen Lehrsatz am konkreten Beispiel des Dreiecks $\triangle ABC[A(6|-17), B(5|-30), C(21|-22)]$, und zwar für den Punkt $X(-4|23)$!

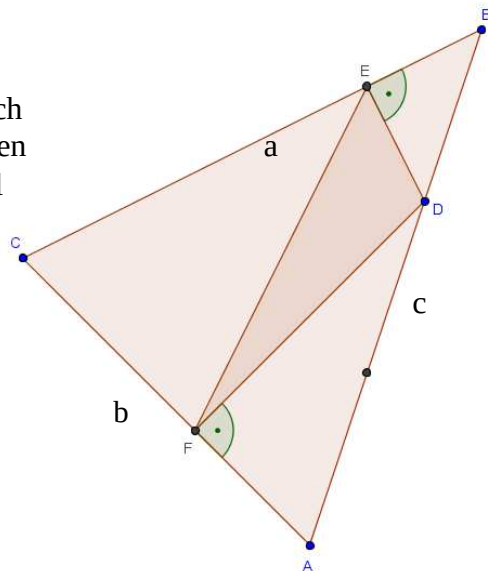
Lsg.: $F = 100$
 $P(19|-23)$
 $Q(-15|-10)$
 $R(9|22)$
 $F' = 700$
 $U(12|-24)$
 $r^2 = 85$
 $\overline{UX}^2 = 2465$



- 7) In nebenstehend abgebildetem Parallelogramm $ABCD$ sind E und F die entsprechenden Seitenhalbierungspunkte und P der Schnittpunkt von g_{CE} mit g_{DF} . Unter diesen Voraussetzungen gilt stets der folgende elementargeometrische **Satz**: Die Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle BCP$, $\triangle CDP$, $\triangle DAP$ und $\triangle ABP$ verhalten sich wie $1 : 2 : 3 : 4$. Verifiziere diesen schönen Lehrsatz am konkreten Beispiel des Parallelogramms $ABCD[A(0|0), B(8|0), C(14|10), D]$!



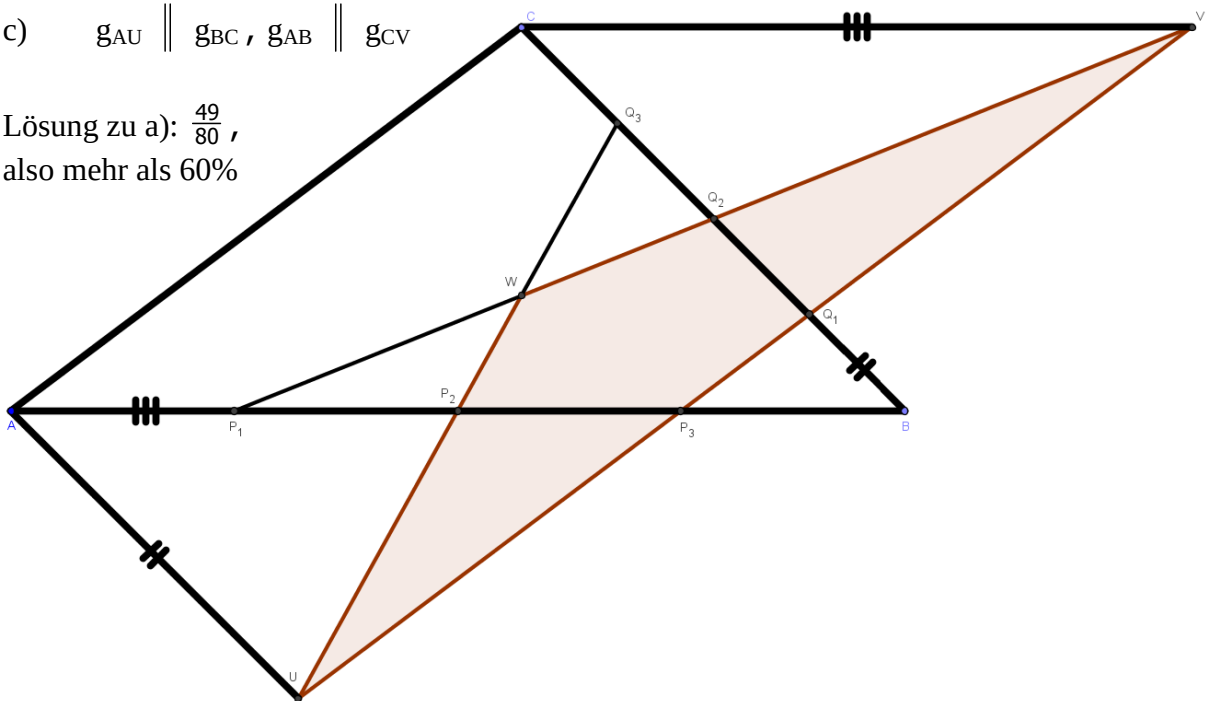
- 8) In der rechten Abbildung wurde die Seite AB in drei gleich lange Teile geteilt, woraus der Punkt D hervorgeht. Für den Flächeninhalt μ' des Dreiecks $\triangle DEF$ gilt dann die Formel $9a^2b^2\mu' = 8\mu^3$, wobei μ den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$ bezeichnet. Verifiziere dies anhand des konkreten Dreiecks $\triangle ABC[A(2/1), B(5/10), C(-3/6)]$!



- 9) Die Seiten AB und BC eines Dreiecks $\triangle ABC$ werden in vier gleich lange Teile geteilt, was die Punkte P_1, P_2 und P_3 sowie Q_1, Q_2 und Q_3 hervorbringt. Aus ihnen geht wiederum (wie in der Abbildung zu erkennen ist) das Dreieck $\triangle UVW$ hervor, welches die folgenden Eigenschaften aufweist, die am konkreten Beispiel des Dreiecks $\triangle ABC[A(0|0), B(140|0), C(80|60)]$ zu verifizieren sind:

- a) Das Dreieck $\triangle UVW$ nimmt mehr als 50% des Dreiecks $\triangle ABC$ an. Sind es auch mehr als 60%? Gib den exakten Bruchteil als vollständig gekürzten Bruch an!
- b) $\overline{P_1W} : \overline{WQ_2} = 3 : 2, \overline{P_2W} : \overline{WQ_3} = 2 : 3$
- c) $g_{AU} \parallel g_{BC}, g_{AB} \parallel g_{CV}$

Lösung zu a): $\frac{49}{80}$,
also mehr als 60%



10) Die Seiten AB und BC eines Dreiecks $\triangle ABC$ werden in vier gleich lange Teile geteilt, was die Punkte P_1, P_2 und P_3 sowie Q_1, Q_2 und Q_3 hervorbringt. Aus ihnen geht wiederum (wie in der Abbildung zu erkennen ist) das Dreieck $\triangle UVW$ hervor, welches die folgenden Eigenschaften aufweist, die am konkreten Beispiel des Dreiecks $\triangle ABC[A(0|0), B(72|0), C(48|36)]$ zu verifizieren sind:

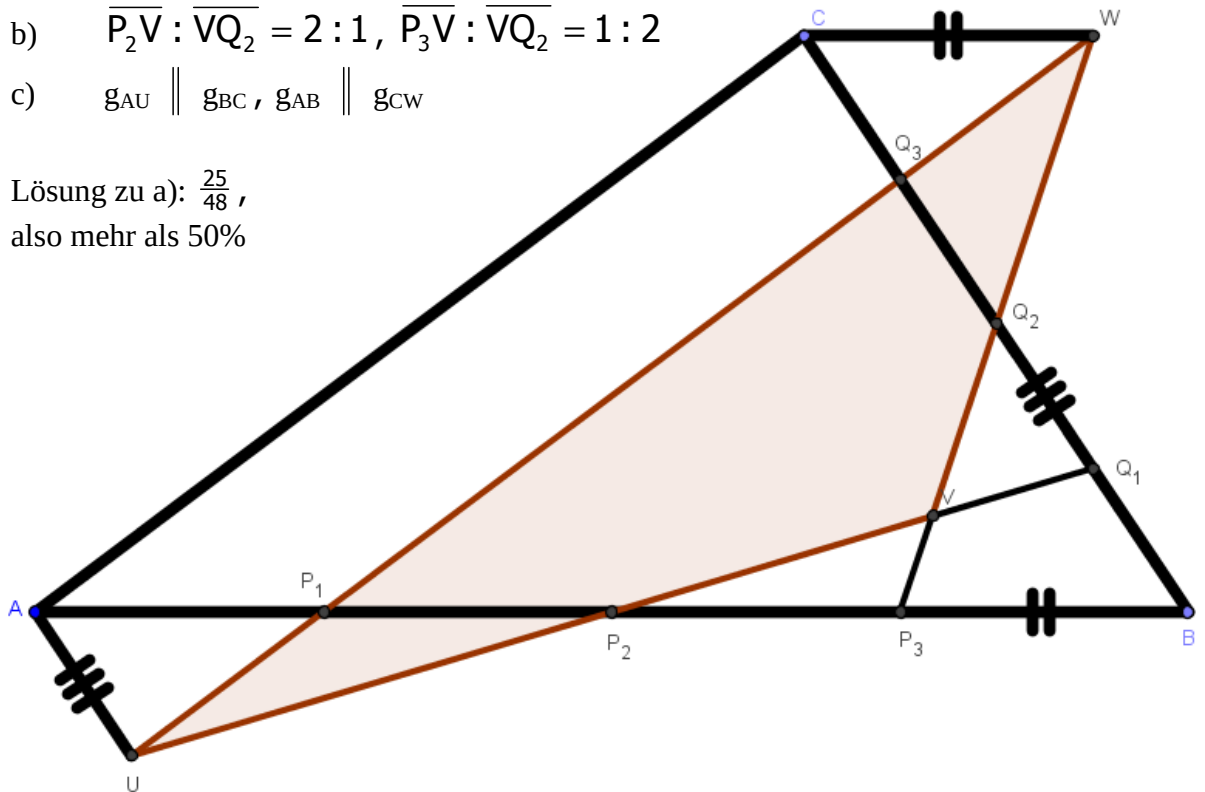
a) Das Dreieck $\triangle UVW$ nimmt mehr als 50% des Dreiecks $\triangle ABC$ an.

Gib den exakten Bruchteil als vollständig gekürzten Bruch an!

b) $\overline{P_2V} : \overline{VQ_2} = 2 : 1, \overline{P_3V} : \overline{VQ_2} = 1 : 2$

c) $g_{AU} \parallel g_{BC}, g_{AB} \parallel g_{CW}$

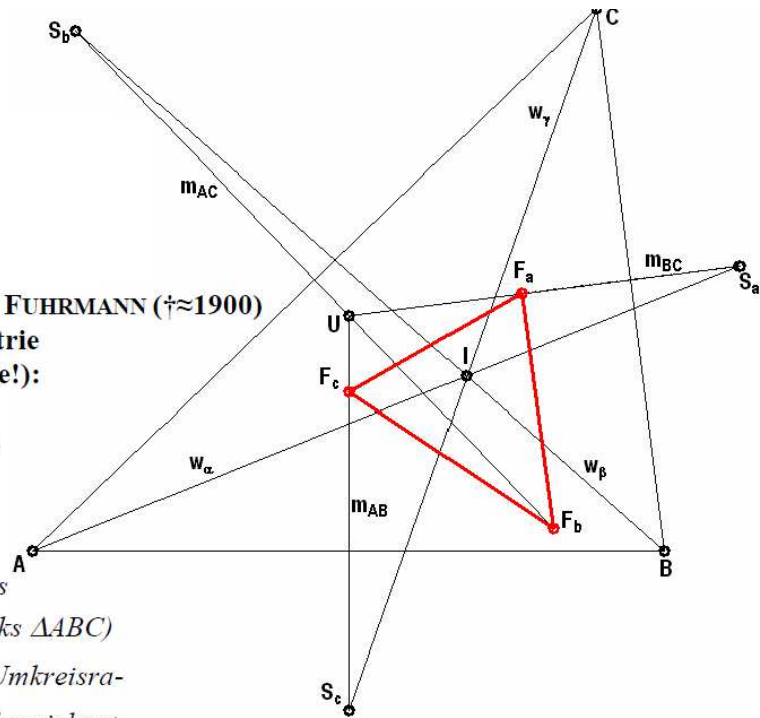
Lösung zu a): $\frac{25}{48}$,
also mehr als 50%



11) Challenge I:

Ein auf den deutschen Mathematiker W. FUHRMANN (†≈1900) zurückgehender Satz der Dreiecksgeometrie lautet wie folgt (vgl. nebenstehende Skizze!):

Spiegelt man die Schnittpunkte S_a , S_b und S_c gegenüberliegender Strecken- und Winkelsymmetralen eines Dreiecks $\triangle ABC$ an den zugehörigen Dreiecksseiten, so gilt für den Flächeninhalt $\mathcal{A}$ des entstandenen Dreiecks $\triangle F_a F_b F_c$ ("FUHRMANN-Dreieck" des Dreiecks $\triangle ABC$) die Formel $\mathcal{A} = \frac{\overline{UI}^2 \cdot u}{4r}$, worin r bzw. u den Umkreisradius bzw. den Umfang des Dreiecks $\triangle ABC$ bezeichnet.



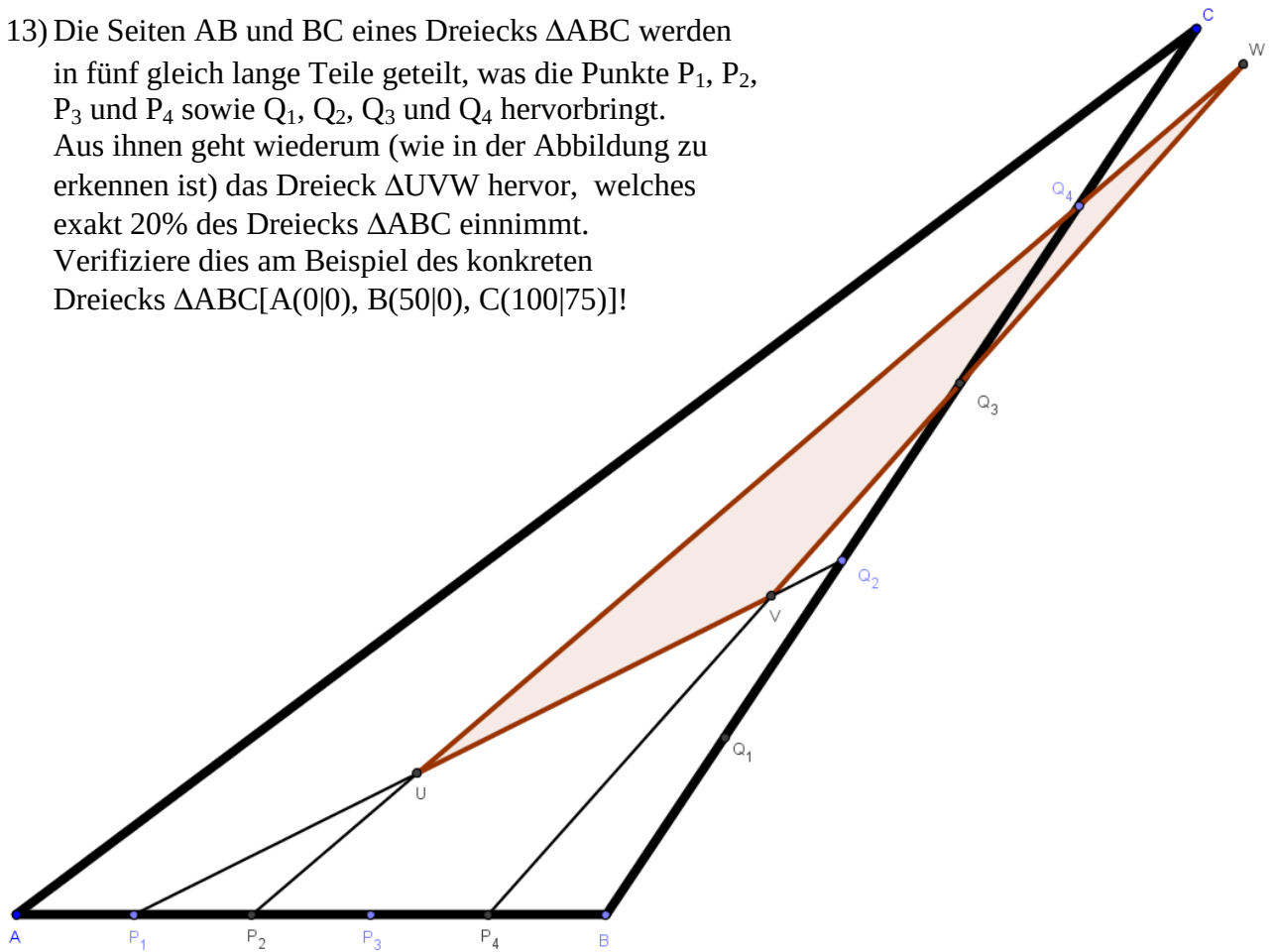
- Kontrolliere die Gültigkeit dieses Juwels der Elementargeometrie am konkreten Beispiel des Dreiecks $\triangle ABC[A(0|0), B(112|0), C(40|96)]$ (Achtung! Skizze nicht maßstabsgetreu!).
- Welche besondere Lage weist das konkrete FUHRMANN-Dreieck auf und inwiefern erleichtert dies die Berechnung von $\mathcal{A}$ (verbale Beschreibung sowie Illustration anhand einer Handskizze)?

12) Challenge II:

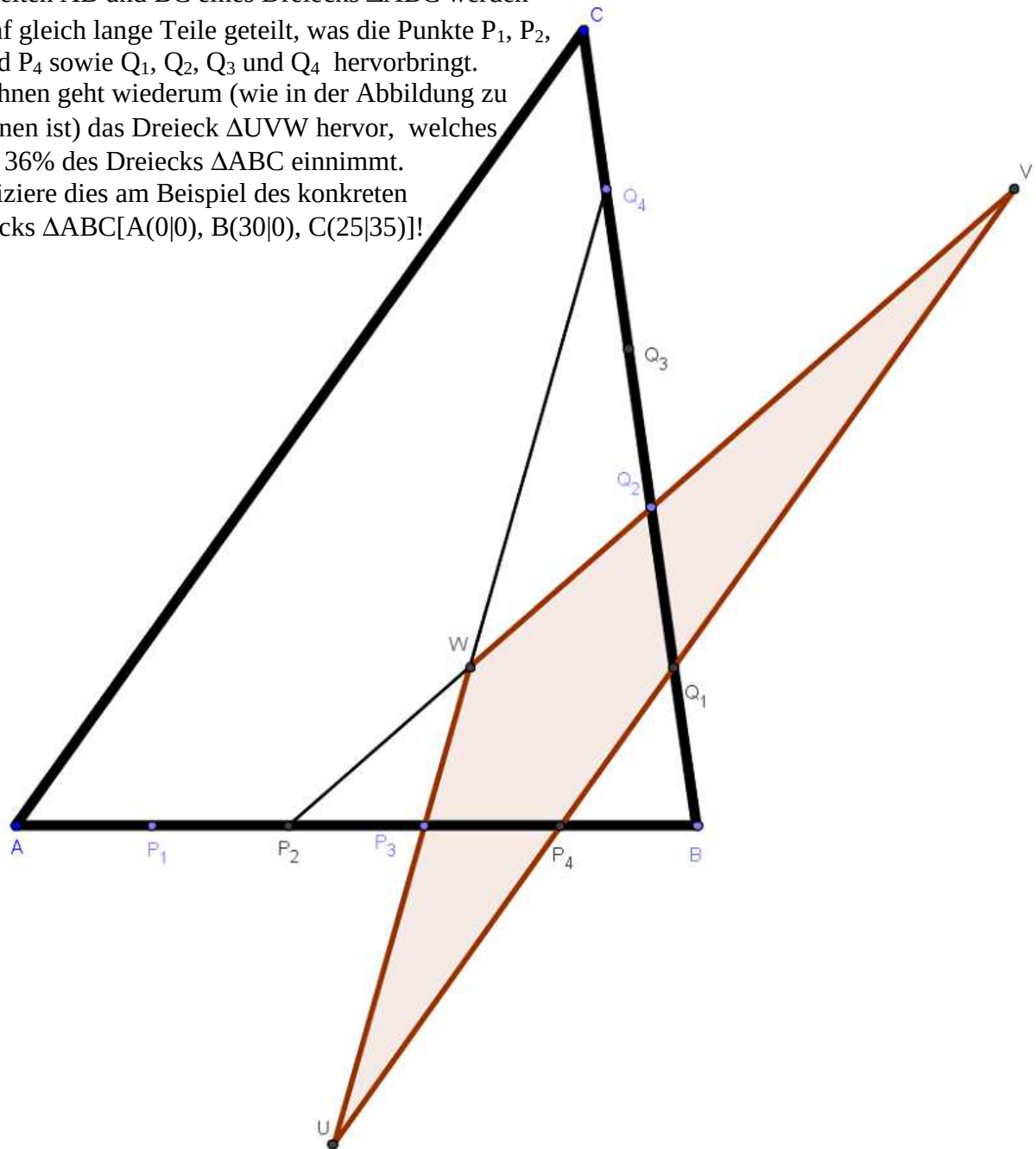
Im Dreieck $\triangle ABC$ mit den Seitenlängen a , b und c sowie dem Flächeninhalt F schneiden die Innenwinkelsymmetralen die Dreiecksseiten in den Punkten A' , B' und C' . Dann gilt für den Flächeninhalt F' des Dreiecks $\triangle A'B'C'$ die nebenstehende Formel. Bestätige dies anhand des Dreiecks $DABC[A(0|0), B(904|0), C(20349|27132)]$!

$$F' = \frac{2abc}{(a+b)(a+c)(b+c)} \cdot F$$

- 13) Die Seiten AB und BC eines Dreiecks $\triangle ABC$ werden in fünf gleich lange Teile geteilt, was die Punkte P_1, P_2, P_3 und P_4 sowie Q_1, Q_2, Q_3 und Q_4 hervorbringt. Aus ihnen geht wiederum (wie in der Abbildung zu erkennen ist) das Dreieck $\triangle U VW$ hervor, welches exakt 20% des Dreiecks $\triangle ABC$ einnimmt. Verifiziere dies am Beispiel des konkreten Dreiecks $\triangle ABC[A(0|0), B(50|0), C(100|75)]$!

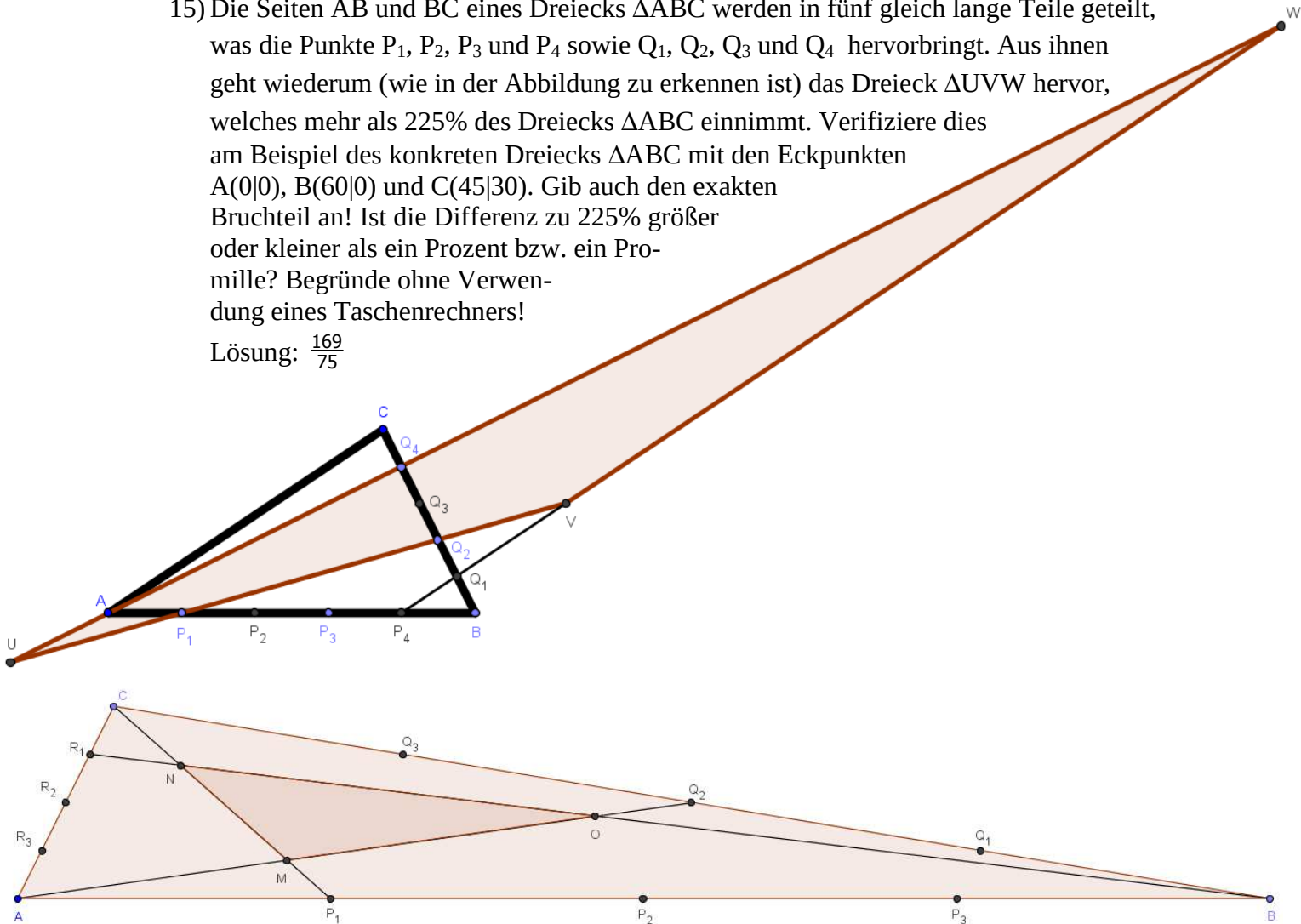


- 14) Die Seiten AB und BC eines Dreiecks $\triangle ABC$ werden in fünf gleich lange Teile geteilt, was die Punkte P_1, P_2, P_3 und P_4 sowie Q_1, Q_2, Q_3 und Q_4 hervorbringt. Aus ihnen geht wiederum (wie in der Abbildung zu erkennen ist) das Dreieck $\triangle UVW$ hervor, welches exakt 36% des Dreiecks $\triangle ABC$ einnimmt. Verifiziere dies am Beispiel des konkreten Dreiecks $\triangle ABC[A(0|0), B(30|0), C(25|35)]$!



- 15) Die Seiten AB und BC eines Dreiecks $\triangle ABC$ werden in fünf gleich lange Teile geteilt, was die Punkte P_1, P_2, P_3 und P_4 sowie Q_1, Q_2, Q_3 und Q_4 hervorbringt. Aus ihnen geht wiederum (wie in der Abbildung zu erkennen ist) das Dreieck $\triangle U VW$ hervor, welches mehr als 225% des Dreiecks $\triangle ABC$ einnimmt. Verifiziere dies am Beispiel des konkreten Dreiecks $\triangle ABC$ mit den Eckpunkten $A(0|0)$, $B(60|0)$ und $C(45|30)$. Gib auch den exakten Bruchteil an! Ist die Differenz zu 225% größer oder kleiner als ein Prozent bzw. ein Promille? Begründe ohne Verwendung eines Taschenrechners!

Lösung: $\frac{169}{75}$

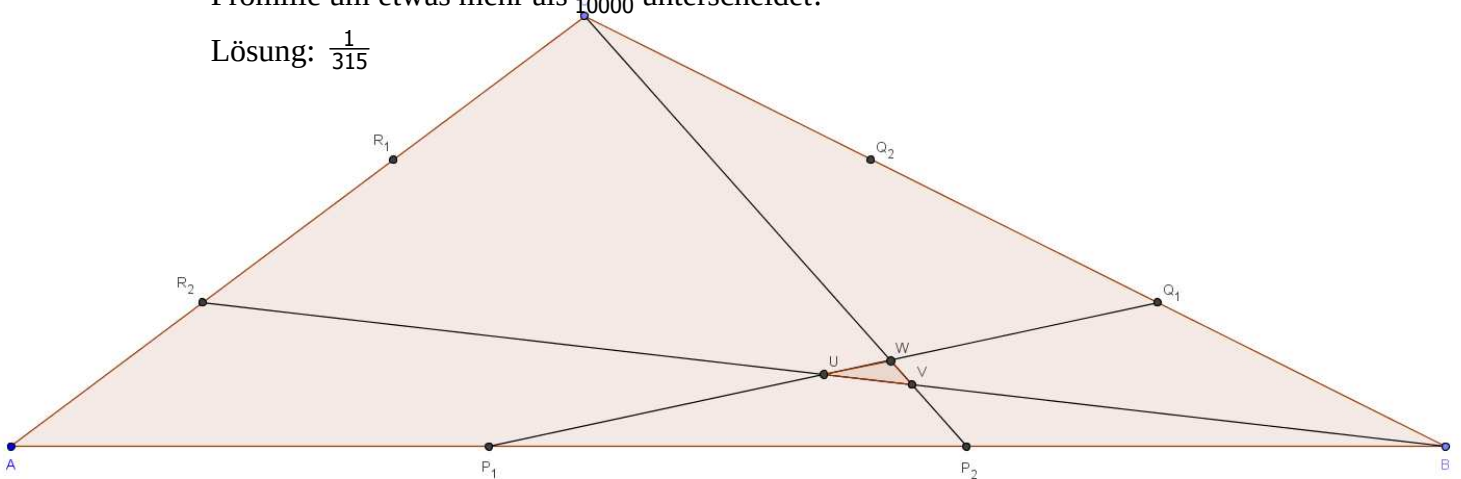


- 16) Die Seiten eines Dreiecks $\triangle ABC$ werden in vier gleich lange Teile geteilt, was die Punkte P_1, P_2 und P_3 sowie Q_1, Q_2 und Q_3 und schließlich R_1, R_2 und R_3 hervorbringt. Aus ihnen geht wiederum (wie in der oberen Abbildung zu erkennen ist) das Dreieck $\triangle MNO$ hervor, von dem ☺.K. behauptet, dass es stets $\frac{9}{64}$ des Dreiecks $\triangle ABC$ einnimmt. Xandl ist skeptisch und überprüft dies am Beispiel des konkreten Dreiecks $\triangle ABC$ mit den Eckpunkten $A(0|0)$, $B(1820|0)$ und $C(140|280)$ und kommt auf einen anderen Bruchteil. Gib den richtigen Bruchteil an und zeige, dass sich dieser von $\frac{9}{64}$ um weniger als $\frac{1}{10000}$ unterscheidet!

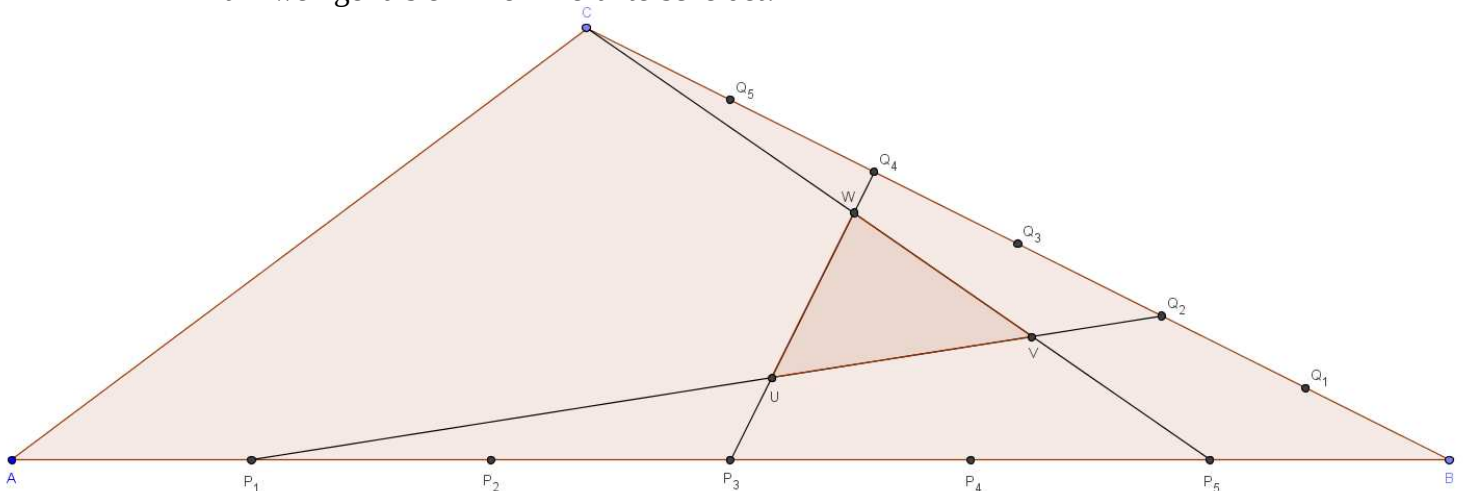
Lösung: $\frac{64}{455}$

- 17) Die Seiten eines Dreiecks $\triangle ABC$ werden in drei gleich lange Teile geteilt, was die Punkte P_1 und P_2 sowie Q_1 und Q_2 und schließlich R_1 und R_2 hervorbringt. Aus ihnen geht wiederum (wie in der unteren Abbildung zu erkennen ist) das Dreieck $\triangle U VW$ hervor, von dem ☺.K. behauptet, dass es stets 3 Promille des Dreiecks $\triangle ABC$ einnimmt. Xandl ist skeptisch und überprüft dies am Beispiel des konkreten Dreiecks $\triangle ABC$ mit den Eckpunkten $A(0|0)$, $B(2100|0)$ und $C(840|630)$ und kommt auf einen anderen Bruchteil. Gib den richtigen Bruchteil an und zeige, dass sich dieser von 3 Promille um etwas mehr als $\frac{1}{10000}$ unterscheidet!

Lösung: $\frac{1}{315}$



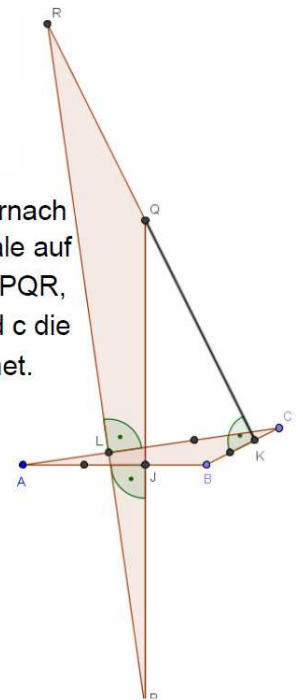
- 18) Die Seiten AB und BC eines Dreiecks $\triangle ABC$ werden in sechs gleich lange Teile geteilt, was die Punkte P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 und P_6 sowie Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 und Q_6 hervorbringt. Aus ihnen geht wiederum (wie in der unteren Abbildung zu erkennen ist) das Dreieck $\triangle U VW$ hervor, von dem ☺.K. behauptet, dass es $\frac{1}{16}$ des Dreiecks $\triangle ABC$ einnimmt. Xandl ist skeptisch und überprüft dies am Beispiel des konkreten Dreiecks $\triangle ABC$ mit den Eckpunkten $A(0|0)$, $B(420|0)$ und $C(168|126)$ und kommt auf einen anderen Bruchteil. Gib den richtigen Bruchteil an und zeige, dass sich dieser von $\frac{1}{16}$ um weniger als ein Promille unterscheidet!



19)

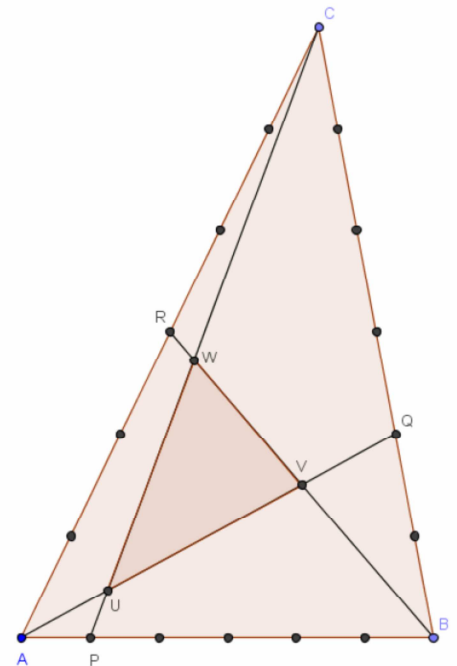
Werden die Seiten eines Dreiecks in drei gleich lange Teile geteilt und hernach durch entsprechende Teilungspunkte (J, K und L in der Abbildung) Normale auf die jeweilige Seite gelegt, so erzeugen diese drei Normalen ein Dreieck $\triangle PQR$, für dessen Flächeninhalt μ' die untenstehende Formel gilt, wobei a , b und c die Seitenlängen des Dreiecks $\triangle ABC$ sowie μ dessen Flächeninhalt bezeichnet. Verifiziere diese Formel für das Dreieck $\triangle ABC[A(0|0), B(15|0), C(21|3)]$!

$$\mu' = \frac{1}{\mu} \cdot \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{12} \right)^2$$

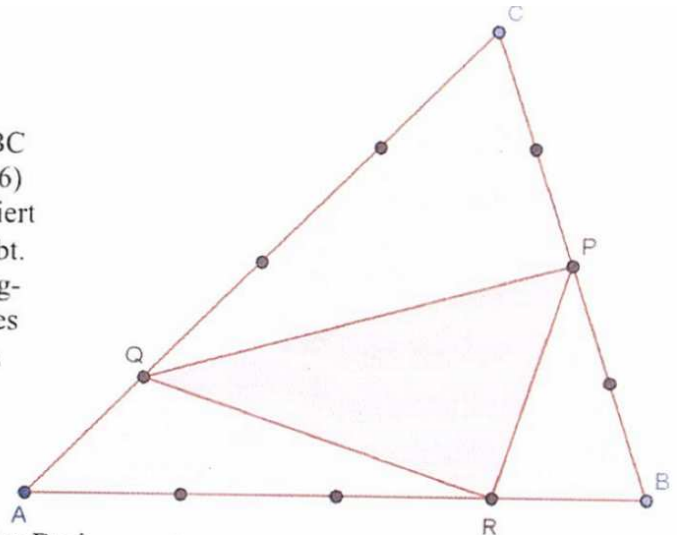


20) Im unmittelbar rechts abgebildeten Dreieck $\triangle ABC$ wurde jede Seite in sechs gleich lange Teile geteilt, woraus das Dreieck $\triangle UVW$ hervorgeht. Verifiziere am Dreieck $\triangle ABC[A(0|0), B(216|0), C(36|1716)]$, dass das Dreieck $\triangle UVW$ ca. $1/7$ des Dreiecks $\triangle ABC$ einnimmt, gib auch den exakten Bruchteil b an und begründe ohne TR, dass die Differenz zwischen b und $1/7$ zwischen einem und zwei Promille liegt! Achtung: Abbildung nicht maßstabsgetreu!!

Lösung: $81/572$



- 21) In der oberen rechten Figur ist das Dreieck $\triangle ABC$ mit den Eckpunkten $A(0|0)$, $B(64|0)$ und $C(36|36)$ abgebildet, aus dem sich wie in der Figur illustriert durch Kantenviertelung das Dreieck $\triangle PQR$ ergibt. Kontrolliere am vorliegenden Beispiel die Gültigkeit des Satzes, demzufolge der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle PQR$ exakt $\frac{5}{16}$ des Flächeninhalts des Dreiecks $\triangle ABC$ beträgt.



- 22) Fortsetzung von Aufgabe 21):

- Ändere die x-Koordinate von B derart, dass das Dreieck $\triangle PQR$ rechtwinklig mit der Hypotenuse PQ wird!
- Verifiziere am konkreten Beispiel, dass $\triangle PQR$ genau dann rechtwinklig mit der Hypotenuse PQ ist, wenn für die Seitenlängen $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ und $c = \overline{AB}$ die Gleichung $7a^2 = 3b^2 + c^2$ gilt!

Gutes Gelingen beim Lösen dieser schönen Aufgaben!

Wien, im Juni 2013.

Dr. Robert Resel, e. h.

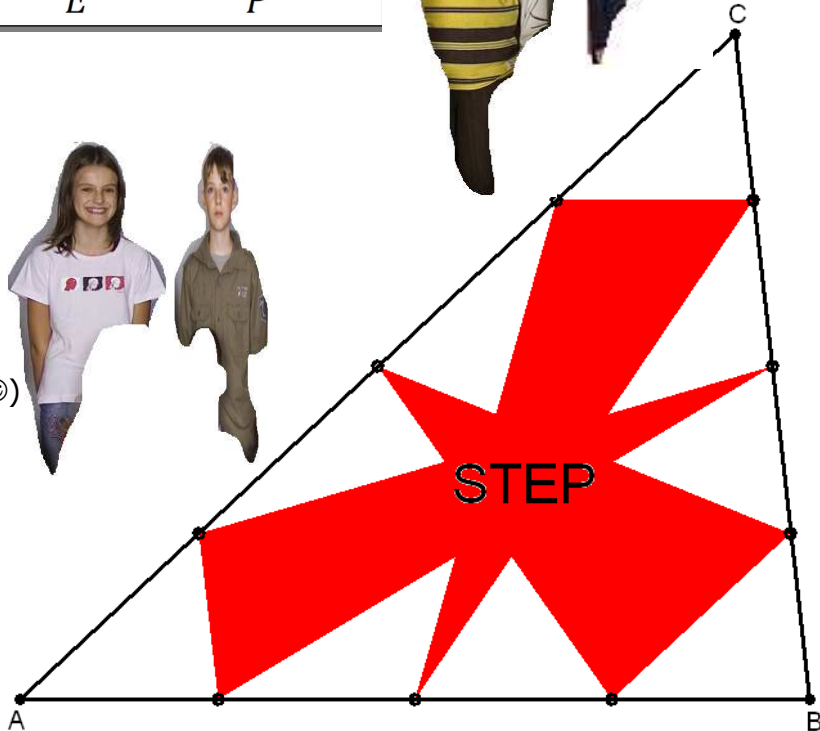
P.S.: Auf den nächsten drei Seiten findest du drei weitere Aufgaben, bezüglich derer wir uns einfach in der 8B(G) bedienen ... ;-)

EINSTIEG ZUR WIEDERHOLUNG DES KAPITELS „EBENE ANALYTISCHE GEOMETRIE“

SOWIZRAL T ROST ELSHARAWI PRANIEß

1) Das von Claudia, Kevin, Omar und Sophie gegründete dynamische Jungunternehmen STEP braucht natürlich auch ein entsprechend kraftvolles Logo, welches in nebenstehender Abbildung durch Viertelung der Seiten eines Dreiecks $\triangle ABC$ entsteht. Unabhängig von der Form des Dreiecks nimmt der gefärbte Teil (wie Claudia und Omar garantieren/kalkulieren) stets mehr als 30% der Dreiecksfläche ein. (Kevin und Sophie freuen sich dann übers Färben.☺)

- a) Rechne dies für das konkrete Dreieck $\triangle ABC[A(0/0), B(84/0), C(56/28)]$ nach!
- b) Um wie viel mehr als 30% nimmt der gefärbte Teil von der Dreiecksfläche ein? Mehr oder weniger als 1% bzw. 1‰? Begründe!



2) Thomas hingegen will seiner eigenen Company KFC (Nein! Nicht Kentucky fried chicken, sondern ein neues Mobilnetz: Kronberger Friendly Connects!☺) ein eher unauffälliges Logo verpassen, welches aber sofort an connections erinnern soll (sichtbare wie unsichtbare!). Außerdem verrät der Anteil des Vierecks an der Dreiecksfläche, welchen Bruchteil des

Gewinns Herr Kronberger freundlicherweise jeweils(!) mit Claudia zu teilen gedenkt, die ihn in seiner Company äußerst tatkräftig unterstützen.

Zeige***, dass Thomas somit $\frac{8}{9}$ des Gewinns bleiben und diskutiert harlotte

(mit bzw. ohne Claudia), ob dies nun fair ist oder nicht. harlotte

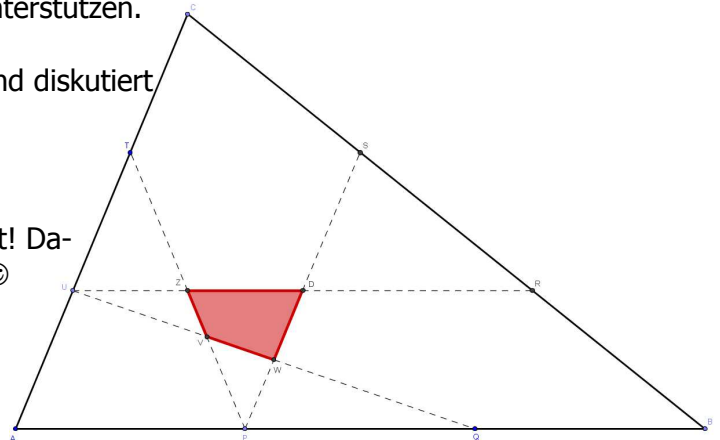
Erörtert, wie es euch mit bzw. ohne Claudia dabei geht! Dabei wurden die Seiten des Dreiecks jeweils in 3 gleich lange Teile geteilt! hristoph * ☺☺☺☺☺

* Christoph Kerschbaum aus der/m „PacK***“, dessen jüngeren Bruder zu unterrichten ich 2011/12 die Ehre hatte

** Prof. Anreiter's coole(r) Klasse (im Gegensatz zur bereits bekannten „PSK“!)



*** Wählt dazu ein Dreieck wie in Aufgabe 1 derart, dass alle vorkommenden Koordinaten durch 18 teilbar sind! Mehr Details: Next page!!



Weitere Details, die an konkreten Beispielen überprüft bzw. allgemein $[A(0|0), B(18p|0), C(18q|18r)]$ bewiesen werden können:

- ✓ Die Strecke AB ist sechsmal so lang wie die Strecke DZ.
- ✓ W ist der Mittelpunkt der Strecke PD.
- ✓ D ist der Mittelpunkt der Strecke PS.
- ✓ A, V, D und $M_{BC}(=M_{RS})$ liegen auf einer Gerade.
 - Finde selbst die entsprechenden Teilverhältnisse heraus!
- ✓ Die Diagonale VD teilt das Viereck VWDZ in zwei gleich große Teile.
 - Finde selbst heraus, ob dies auch für die andere Diagonale gilt und ermittle ggf. das entsprechende Teilungsverhältnis!

Schließlich noch ein digitaler Ausschnitt aus einer ähnlich gelagerten Thematik (Erfinde selbst eine Geschichte dazu, singe ein Lied und freue dich über die dadurch zur Geltung kommenden

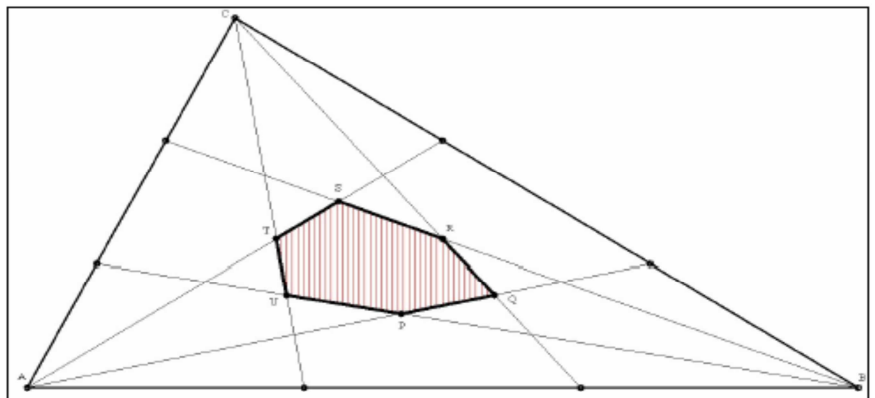
Kompetenzen! 🤪 🧐):

↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓

Unwort des Jahres!!!!!!

... und hoffentlich bald Geschichte!!

EIN SPEZIELLES JEDEM DREIECK ZUGEORDNETES SECHSECK MIT DIVERSEN EIGENSCHAFTEN



Die Seiten des Dreiecks ABC werden in drei gleich lange Teile geteilt. Durch die Verbindungsstrecken der Teilungspunkte mit dem jeweils gegenüberliegenden Eckpunkt entstehen sechs neue Strecken, welche ein Sechseck PQRSUT erzeugen, welches durch folgende Eigenschaften besteht:

- Der Flächeninhalt des Sechsecks beträgt exakt 10% ($\frac{1}{10}$) des Flächeninhalts des Dreiecks, wobei die Aufteilung folgendermaßen erfolgt:
 - Die Flächeninhalte der Dreiecke TUP, PQR und RST (zu den Eckpunkten A, B und C "hinblickend") betragen jeweils 2% ($\frac{1}{50}$) des Gesamtdreiecksflächeninhalts.
 - Der Flächeninhalt des "Mittendreiecks" PRT beträgt 4% ($\frac{1}{25}$) des Gesamtdreiecksflächeninhalts.
- Die Gerade g_{UQ} verläuft parallel zur Gerade g_{AB} .
- Die Gerade g_{QS} verläuft parallel zur Gerade g_{BC} .
- Die Gerade g_{SU} verläuft parallel zur Gerade g_{AC} .
- Wählt man $A(0|0)$, $B(60c|0)$ und $C(60a|60b)$, so erhält man die Punkte $P(12a+24c|12b)$, $Q(15a+30c|15b)$, $R(24a+24c|24b)$, $S(30a+15c|30b)$, $T(24a+12c|24b)$ und $U(15a+15c|15b)$, ...
- ... woraus man $\overline{UQ} = \frac{1}{4} \cdot \overline{AB}$, $\overline{QS} = \frac{1}{4} \cdot \overline{BC}$ und $\overline{SU} = \frac{1}{4} \cdot \overline{AC}$ erhält, was auch folgende Aufteilung zulässt:
 - Die Flächeninhalte der Dreiecke UPQ, QRS und STU (zu den Seiten AB, BC und AC "hinblickend") betragen jeweils 1,25% ($\frac{1}{80}$) des Gesamtdreiecksflächeninhalts.
 - Der Flächeninhalt des "Mittendreiecks" UQS beträgt 6,25% ($\frac{1}{16}$) des Gesamtdreiecksflächeninhalts.
- Die Hauptdiagonalen UR, PS und QT liegen auf den Schwerlinien des Dreiecks ABC und schneiden einander somit im Schwerpunkt des Dreiecks ABC.
 - Dabei halbiert U bzw. Q bzw. S die Schwerlinie durch A bzw. B bzw. C.
 - Dabei teilt R bzw. P bzw. T die Schwerlinie durch A bzw. B bzw. C von A bzw. B bzw. C ausgehend im Verhältnis 4:1.
 - Die Hauptdiagonalen teilen einander im gemeinsamen Schnittpunkt G im Verhältnis 4:5, wobei G den Eckpunkten P, R und T (die also den Dreiecksseiten "zugewandt" sind) näher liegt.

zu 1): Lösung: $17/56$, also um $1/280$ mehr als 30%, das ist mehr als 1‰ und weniger als 1%

