Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Bildungsdirektion
Wien

ahs heustadelgasse wien

www.heustadelgasse.at

51. Österreichische Mathematische Olympiade 2020

138 abschlieszende vermischte Aufgaben

Kursleiter: Dr. Robert Resel

1. Ermittle

$$\left(1^2+3^2+5^2+\ldots+99^2\right)-\left(2^2+4^2+6^2+\ldots+100^2\right)+(4+8+12+\ldots+200).$$

2. Eine dreistellige Zahl, deren Hunderter-, Zehner- und Einerziffer aufeinanderfolgende, kleiner werdende natürliche Zahlen sind, ist um 21 kleiner als das Dreifache des Quadrates ihrer Ziffernsumme. Bestimme diese Zahl.

3. Man ermittle alle zweistelligen Zahlen, die genau so groß sind wie das Produkt aus ihrer Ziffernsumme und der Einerziffer.

4. Für die Funktion f mit dem Definitionsbereich $D_f=\mathbb{N}^*$ gilt $f(1)=1996$ sowie

$$f(1)+f(2)+\ldots+f(n)=n^2\cdot f(n)\quad \forall n>1.$$

   Ermittle den exakten Wert von $f(1996)$.

5. Beweise $\forall a\in\mathbb{R}^+$ sowie $\forall b\in\mathbb{R}^+$ die Ungleichung

$$4\left(a^3+b^3\right)\geq(a+b)^3$$

   und untersuche auch den Fall der Gleichheit.

6. Beweise: Ist $(n-1,n+1)$ ein Primzahlzwillingspaar, dann ist $n^2\left(n^2+16\right)$ durch 720 teilbar.

7. Ermittle vier Primfaktoren unter 100 von $3^{32}-2^{32}$.

8. Beweise $\forall a \in \mathbb{R}^+$ sowie $\forall b \in \mathbb{R}^+$ und $\forall c \in \mathbb{R}^+$ die Ungleichung

$$\left(a^2+b^2\right)^2 \geq (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$$

und untersuche auch den Fall der Gleichheit.

9. Ermittle (freilich ohne Taschenrechner)

$$\frac{1^4+2007^4+2008^4}{1^2+2007^2+2008^2}.$$

10. Es sei $x \in \mathbb{N}$ sowie $y \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{N}$ mit

$$\left\{ \begin{array}{c} x+y-z=12 \\ x^2+y^2-z^2=12 \end{array} \right\}.$$

Berechne alle möglichen Lösungstripel.

11. Ermittle alle sowohl positiven als auch negativen ganzzahligen Werte für n, sodass $n^2+20n+11$ eine Quadratzahl ist.

12. Ermittle (freilich ohne Taschenrechner)

$$\frac{2014^4+4\cdot 2013^4}{2013^2+4027^2}-\frac{2012^4+4\cdot 2013^4}{2013^2+4025^2}.$$

13. a und b seien von 0 verschiedene natürliche Zahlen sowie p eine von 2 und 3 verschiedene Primzahl, sodass $a^2+p^2=b^2$ gilt. Beweise:

    (a) $12 \mid a$

    (b) $2(a+p+1)$ ist eine Quadratzahl.

14. Ermittle alle Paare positiver ganzer Zahlen (m,n), welche die folgende Gleichung erfüllen:

$$n^2-6n=m^2+m-10$$

15. Ausgehend vom Quadrat $\square ABCD$ wird auf dessen Seite BC bzw. CD der Punkt E bzw. F so gewählt, dass $\measuredangle EAF=45°$ gilt und weder E noch F Eckpunkte des Quadrats sind. Die Gerade g_{AE} bzw. g_{AF} schneidet die Umkreislinie des Quadrats nebst A außerdem noch in G bzw. H. Beweise, dass $g_{EF} \parallel g_{GH}$ gilt.

16. Ermittle alle $x \in \mathbb{R}$, welche die Gleichung $\left\lfloor \frac{20}{x+18} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+18}{20} \right\rfloor = 1$ erfüllen.

17. Ermittle alle Paare reeller Zahlen x und y, welche das Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{r} 2x+y=\dfrac{2}{|x|+x} \\ 7x+8y=\dfrac{2}{|y|+y} \end{array} \right\}$$

erfüllen.

18. Beweise, dass für jedes Lösungspaar (x, y) des Gleichungssystems

$$\left\{ \begin{array}{c} x = 3x^2y - y^3 \\ y = x^3 - 3xy^2 \end{array} \right\}$$

die folgende Beziehung gilt:

$$m_h(x, y) = 2 \cdot (x - y) \cdot m_q(x, y)^2$$

19. Ermittle alle positiven ganzen Zahlen a und b mit

$$\binom{ab+1}{2} = 2ab(a + b),$$

wobei

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot [n-(k-2)] \cdot [n-(k-1)]}{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} \quad \text{mit} \quad 0 \leq k \leq n.$$

20. x, y und z seien reelle Zahlen, deren Summe 0 ergibt, wobei jede der drei Zahlen nicht größer als 1 ist. Beweise die Ungleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz \leq 9$$

und untersuche auch den Fall der Gleichheit.

21. Ermittle alle Paare (x, y) reeller Zahlen, welche das Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{c} \sqrt{x - 2016} + \sqrt{y - 56} = 11 \\ x + y = 2193 \end{array} \right\}$$

erfüllen.

22. Bestimme alle Tripel (x, y, z) reeller Zahlen, welche das Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{c} xy = 20 \\ yz = 12 \\ x + y + z = 12 \end{array} \right\}$$

erfüllen.

23. Für welche Primzahl(en) p und welche von 0 verschiedene natürliche(n) Zahl(en) n gilt $n^2 + 8n + 6 = p - 1$?

24. Ermittle alle positiven ganzzahligen Lösungspaare des Gleichungssystems

$$\left\{ \begin{array}{c} x^2 - xy = 2009 \\ y^2 - x = 15 \end{array} \right\}.$$

25. Für $a \in \mathbb{R}_0{}^+$ und $b \in \mathbb{R}_0{}^+$ mit $ab \leq 1$ beweise man $\dfrac{a}{b} + \dfrac{1}{a} \geq a + 1$.

26. Beweise, dass das Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{c} x^2 + y^2 = 25 \\ ax + by = 10 \end{array} \right\}$$

genau dann reell lösbar ist, wenn $a^2 + b^2 \geq 4$ gilt.

27. Löse: $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+3} = \sqrt{2x-1} + \sqrt{2x+1}$

28. Löse: $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = 2\sqrt{x}$

29. Ermittle alle Lösungspaare des Gleichungssystems

$$\left\{ \begin{array}{c} x^2 + 4y = 21 \\ y^2 + 4x = 21 \end{array} \right\}.$$

30. Löse über $\mathbb{R}$: $\dfrac{|x^2-1|}{x-2} = x$

31. Ermittle alle Lösungspaare des Gleichungssystems

$$\left\{ \begin{array}{c} (x+y)^2 - 3(x+y) = 4 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{6} \end{array} \right\}.$$

32. Für $a \in \mathbb{R}^+$ und $b \in \mathbb{R}^+$ mit $ab = 1$ beweise man $a^3 + b^3 + 1 \geq 2a + b^2$.

33. Ermittle alle Lösungspaare des Gleichungssystems

$$\left\{ \begin{array}{c} x^4 + y^4 = 17(x+y)^2 \\ xy = 2(x+y) \end{array} \right\}.$$

34. Für $a \in \mathbb{R}^+$ und $b \in \mathbb{R}^+$ beweise man $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$.

35. Ermittle jene $x \in \mathbb{N}^*$ sowie $y \in \mathbb{N}^*$, welche $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{2003}$ erfüllen.

36. Ermittle alle Lösungstripel des Gleichungssystems

$$\left\{ \begin{array}{c} xyz = 2002 \\ x + y + z = 42 \\ xy + xz = 377 \end{array} \right\}.$$

37. Ermittle alle Lösungspaare des Gleichungssystems

$$\left\{ \begin{array}{c} 2a^2 - 2ab + b^2 = a \\ 4a^2 - 5ab + 2b^2 = b \end{array} \right\}.$$

38. Ermittle alle Lösungspaare des Gleichungssystems

$$\left\{ \begin{array}{c} x^4 + y^3 = 9 \\ x^2 + y = 3 \end{array} \right\}.$$

39. Ermittle alle Lösungspaare des Gleichungssystems

$$\left\{ \begin{array}{c} x^3 = y^2 - 1 \\ x^2 = y + 1 \end{array} \right\}.$$

40. Ermittle alle Lösungspaare des Gleichungssystems

$$\left\{ \begin{array}{c} x(y+41) = 2001 \\ (3x+2y) \cdot \dfrac{y}{2} = 2002 \end{array} \right\}.$$

41. Ermittle alle Lösungspaare des Gleichungssystems

$$\left\{ \begin{array}{c} y - 8 = \sqrt{\dfrac{x+y+8}{2}} \\ y + 5 = \sqrt{x + \dfrac{y}{2} + 5} \end{array} \right\}.$$

42. Ermittle alle Lösungspaare des Gleichungssystems

$$\left\{ \begin{array}{c} \sqrt{x+y} + \sqrt{z} = 7 \\ \sqrt{x+z} + \sqrt{y} = 7 \\ \sqrt{y+z} + \sqrt{x} = 5 \end{array} \right\}.$$

43. Ermittle alle Lösungspaare des Gleichungssystems

$$\left\{ \begin{array}{c} x^3 + y^3 = 3 \\ x^9 + y^9 = 9 \end{array} \right\}.$$

44. Es sei $x \in \mathbb{N}^*$ sowie $y \in \mathbb{N}^*$ sowie $(x^3 - 198) \cdot \dfrac{y}{3} = 1999$. Ermittle $x \cdot y$!

45. Ermittle alle Lösungspaare des Gleichungssystems

$$\left\{ \begin{array}{c} x + \dfrac{x}{y} = \dfrac{8}{3} \\ y - \dfrac{1}{x} = \dfrac{5}{2} \end{array} \right\}.$$

46. Für $n \geq 11$ beweise man:

$$f(n) := \frac{(4 \cdot 1^4 + 1) \cdot (4 \cdot 3^4 + 1) \cdot (4 \cdot 5^4 + 1) \cdot ... \cdot [4 \cdot (2n-1)^4 + 1]}{(4 \cdot 2^4 + 1) \cdot (4 \cdot 4^4 + 1) \cdot (4 \cdot 6^4 + 1) \cdot ... \cdot [4 \cdot (2n)^4 + 1]} < \frac{1}{1000}$$

47. Ermittle alle Lösungspaare des Gleichungssystems

$$\left\{ \begin{array}{c} x - 2 = (x+2)(y-2) \\ x^2 = 4\left(y^2 - 4y + x + 3\right) \end{array} \right\}.$$

48. Löse die Gleichung $8^x + 2 = 4^x + 2^{x+1}$.

49. Ermittle alle Lösungspaare des Gleichungssystems

$$\left\{ \begin{array}{c} xy(x+y) = 30 \\ x^3 + y^3 = 35 \end{array} \right\}.$$

50. Löse die Gleichung $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+1=0$.

51. Es seien a, b und k reelle Zahlen, wobei $0 \leq b \leq a$ gelte.

$$\text{Beweise: } \sqrt{a^2+k^2} - \sqrt{b^2+k^2} \leq a-b$$

52. Für $n \geq 4$ beweise man:

$$\left(4^2-4\right)\cdot\left(5^2-4\right)\cdot\left(6^2-4\right)\cdot\ldots\cdot\left(n^2-4\right) < 6\cdot\left(4^2-9\right)\cdot\left(5^2-9\right)\cdot\left(6^2-9\right)\cdot\ldots\cdot\left(n^2-9\right)$$

53. Löse die Gleichung $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)(x+9)(x+11)+225=0$.

54. Dem Quadrat $\square ABCD$ wird auf seine Seite CD nach außen ein gleichseitiges Dreieck ΔDCE aufgesetzt. Ferner wird D an C gespiegelt, was F liefert. Ermittle das Maß des spitzen Schnittwinkels zwischen g_{AE} und g_{BF}!

55. Anna schreibt die Zahlen von 16 bis 24 der Reihe nach auf einen Zettel, den ihr Bruder Erik derart in zwei Teile reißt, dass auf einem Teil genau eine Zahl mehr steht als auf dem anderen Teil. Bevor Anna sich so richtig ärgern kann, fällt ihr auf, dass die Summe der Zahlen auf beiden Streifenteilen gleich groß ist. Dies wirft für sie als Jungmathematikerin freilich die Frage auf, ob es noch andere Reihen aufeinanderfolgender Zahlen mit eben genau dieser Eigenschaft gibt.

    (a) Finde drei weitere solche Zahlenreihen, darunter auch jene mit der aktuellen Jahreszahl.

    (b) Beweise, dass jede derartige Zahlenreihe immer mit einer Quadratzahl beginnen muss.

56. Für welche Primzahlen p_1, p_2 und p_3 gilt $\dfrac{1}{11} = \dfrac{1}{p_1 \cdot p_2} + \dfrac{1}{p_2 \cdot p_3} + \dfrac{1}{p_1 \cdot p_3}$?

57. Im Schuljahr 2018/19 fand in Deutschland das 27. Mal die Fürther-Mathematik-Olympiade statt, in Unterfranken wurde er damals das 20. Mal angeboten. Deshalb bildet Paul aus den Punkten $F(27|20)$ $M(2018|2019)$ und $O(0|0)$ das Dreieck ΔFMO ("F(Ü)MO-Dreieck").

    (a) Berechne den Flächeninhalt dieses Dreiecks!

    (b) Beweise: Das F(Ü)MO-Dreieck wächst jedes Schuljahr um vier Flächeneinheiten.

58. Eine Zahl heißt "*leiwaund*", wenn sie sich als Produkt zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ($\neq 0$) schreiben lässt. Beweise, dass man durch Anhängen der Zahl 25 (nicht addieren!) an eine leiwaunde Zahl stets eine Quadratzahl erhält.

59. Im Quadrat $\square ABCD$ mit der Seitenlänge a wird jede Diagonale über C bzw. D hinaus um a verlängert, was die Punkte E und F erzeugt.

(a) Beweise: Das Viereck $ABEF$ ist ein gleichschenkliges Trapez.

(b) Berechne die Maße aller Innenwinkel von $ABEF$.

60. Im Parallelogramm $ABCD$ bezeichne M den Mittelpunkt der Seite AD sowie L den Mittelpunkt der Strecke CM. Welchen Bruchteil des Parallelogramms nimmt das Fünfeck $ABLCD$ ein?

61. Ein paar Tage nach seinem letzten Geburtstag kommt ein pensionierter Mathematiklehrer ins Grübeln. Sein aktuelles Alter ist eine Primzahl. Vor einem Jahr konnte er sein damaliges Alter als Produkt von drei verschiedenen Primzahlen schreiben. In einem Jahr wird sich sein Alter als Produkt aus dem Quadrat einer Primzahl und der dritten Potenz einer anderen Primzahl berechnen lassen. Wie alt ist der pensionierte Mathematiklehrer?

62. Eine natürliche Zahl z beginnt mit der Ziffer 1. Nimmt man diese 1 von der ersten Stelle und hängt sie an die verbliebenen Ziffern an, so entsteht eine neue Zahl y (Bsp.: $z = 5298 \;\Rightarrow\; y = 2985$). Ermittle die kleinste Zahl z, für welche $y = 3 \cdot z$ gilt.

63. Im Dreieck ΔABC schneidet die Winkelsymmetrale des Winkels $\measuredangle ACB$ die Seite AC im Punkt D. Ferner gilt $\overline{AB} = \overline{BD} = \overline{DC}$. Beweise, dass es sich bei ΔABC um den zehnten Teil eines regelmäßigen Zehnecks handelt.

64. Der Mittelwert von 2018 nicht unbedingt verschiedenen, positiven ganzen Zahlen zwischen 1 und 20 182 018 beträgt 2018.

    (a) Berechne die größtmögliche Zahl, die unter diesen 2018 Zahlen auftreten kann.

    (b) Ermittle die größtmögliche Zahl, wenn alle 2018 Zahlen paarweise verschieden sind.

65. Wir gehen von drei paarweise verschiedenen Punkten aus. Zeige, dass es je nach Lage dieser drei Punkte entweder unendlich viele oder genau drei Geraden gibt, von denen alle drei Punkte den gleichen Normalabstand haben.

66. Mit zwei natürlichen Zahlen wurden die folgenden Rechenoperationen durchgeführt:

    - Die Zahlen wurden addiert.
    - Die kleinere Zahl wurde von der größeren subtrahiert.
    - Die Zahlen wurden miteinander multipliziert.
    - Die größere Zahl wurde durch die kleinere dividiert.

    Die Summe der vier Resultate ergab 243. Ermittle alle möglichen Lösungspaare!

67. Prof. X schreibt eine natürliche Zahl n (< 50000) an die Tafel. Ein Schüler sieht sofort, dass n gerade ist. Ein anderer meint, dass n durch 3 teilbar sei. Ein dritter wiederum findet heraus, dass n ein Vielfaches von ist. Dies geht so weiter, bis schließlich der zwölfte Schüler sagt: "Die Zahl n besitzt auch den Teiler 13."
Nach kurzem Nachdenken stellt der Lehrer am Ende fest: "Genau zwei der zwölf Aussagen waren falsch. Die beiden falschen Vermutungen sind unmittelbar hintereinander erfolgt."
Begründe mit Hilfe dieser Äußerungen klar, welche Zahl Prof. X an die Tafel geschrieben haben muss.

68. Die Seiten eines dicken Buches werden beginnend mit Seite 1 fortlaufend durchnummeriert, wofür sage und schreibe 6877 Ziffern verwendet werden. Wie viele Seiten hat dieses Buch?

69. Länge und Breite eines rechteckigen Platzes weisen in Metern gemessen ganzzahlige Längen auf. Legt man den Platz mit quadratischen Platten à 1m^2 aus, dann ist die Anzahl der inneren Platten genau so groß als die Anzahl der am Rand liegenden Platten. Welche Abmessungen kommen für diesen Platz daher in Frage?

70. Ermittle alle durch 16 teilbaren natürlichen Zahlen mit der Ziffernsumme 12 sowie dem Ziffernprodukt 14.

71. Ermittle alle natürlichen Zahlen, welche die folgenden drei Bedingungen erfüllen:

    (a) Die Zahl ist neunstellig.
    (b) Die aus der ersten, zweiten und dritten bzw. vierten, fünften und sechsten resp. der siebten, achten und neunten Ziffer gebildeten Zahlen verhalten sich wie 1:3:5.
    (c) Die Zahl ist durch alle natürlichen Zahlen von 2 bis 10 teilbar.

72. Zerlege die Zahl 279 so in neun Summanden, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

    - Alle Summanden sind natürliche Zahlen.
    - Ordnet man sie der Größe nach, so unterscheiden sie sich benachbarte Summanden um jeweils die gleiche Zahl.

    Ermittle alle möglichen derartigen additiven Zerlegungen von 279 und begründe auch die Vollständigkeit der Lösung!

73. Beweise: Die via

$$z := 2020! \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + + \frac{1}{2018} + \frac{1}{2019} + \frac{1}{2020}\right)$$

definierte Zahl (wobei $n! := n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot ... \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$) ist durch 2021 teilbar.

74. Ermittle den Wert der Differenz

$$\begin{array}{c} 9081726351 \cdot 9081726357 \cdot 9081726360 \cdot 9081726352 \\ -9081726353 \cdot 9081726359 \cdot 9081726358 \cdot 9081726350 \end{array}$$

ohne Taschenrechner sowie ohne händisches(!) Ausrechnen.

75. Für $T(n) := \dfrac{n^3-1}{n^3+1}$ bilde man das Produkt $\wp := \prod_{n=2}^{100} T(n)$ und beweise, dass $\wp < \dfrac{2}{3}$ gilt (wiederum ohne Taschenrechner sowie ohne händisches Ausrechnen.).

76. Ermittle die Einerziffer von $3^{2019} + 5^{2020} + 7^{2021}$!

77. Beweise, dass die Summe der Quadrate von fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen nicht wieder eine Quadratzahl sein kann. Ist dies bei der Summe der Quadrate von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen möglich (Beweis!)?

78. Zeige, dass sich die Zahl 1 000 000 000 eindeutig als Produkt zweier natürlicher Zahlen anschreiben lässt, welche beide an der Einerstelle keine Null aufweisen.

79. Passend zur Jahreszahl zeige man, dass 2019^{2019} bzw. 2020^{2020} etwas mehr als 4 Millionen bzw. 16 Milliarden Teiler besitzt.

80. Ebenso passend zur Jahreszahl zeige man, dass 20^{19} bzw. 20^{20} exakt 780 bzw. 861 Teiler besitzt und berechne, für welches $n \in \mathbb{N}$ die Zahl 20^n exakt 2016 Teiler besitzt.

81. Ermittle alle durch 8 teilbaren natürlichen Zahlen mit der Ziffernsumme 10 sowie dem Ziffernprodukt 12.

82. Anna nennt ein Rechteck schön, wenn die Maßzahlen seiner Seiten natürliche Zahlen sind und die Maßzahlen seines Umfangs und seines Flächeninhalts übereinstimmen. Ermittle in diesem Sinne alle schönen Rechtecke.

83. Für welche natürlichen Zahlen a, b, c und d mit $b > c$ (0 nicht mitgerechnet!) gilt

$$2001 = (2+a) \cdot (0+b) \cdot (0+c) \cdot (1+d)?$$

Ermittle alle möglichen Lösungen!

84. Ermittle alle Möglichkeiten, die Zahl 2001 als Summe von mindestens zwei aufeinanderfolgenden natürlicher Zahlen darzustellen.

85. Spiegelt man in einem konvexen Viereck $ABCD$ den Punkt $\left\{\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array}\right\}$ am Punkt $\left\{\begin{array}{c} B \\ C \\ D \\ A \end{array}\right\}$, so entsteht durch die gespiegelten Punkte ein neues Viereck. Den wievielfachen Flächeninhalt des Ausgangsvierecks weist das neue Viereck auf?

86. Die Bewohner des ÖMO-Planeten benutzen keine Finger zum Zählen, sondern deren Fühler. Da sie anatomisch mit weniger als zehn Fühlern ausgestattet wurden, rechnen sie nicht wie wir im dekadischen Zahlensystem, sondern benutzen ein Zahlensystem, dessen Ziffervorrat mit der Anzahl der ÖMO-Fühler übereinstimmt. In ebenjenem System gilt dann etwa

$$(12)_b \cdot (34)_b = (441)_b \,.$$

Wie viele Fühler hat denn nun ein ÖMO-Maner?

87. Maximum hat eine neue Rechenoperation erfunden, welche darin besteht, zwei Zahlen dergestalt eine dritte Zahl zuzuordnen, indem man das Produkt der beiden Ausgangszahlen um 1 vergrößert, was er als "maximieren" bezeichnet. Ausgehend von drei paarweise verschiedenen positiven ganzen Zahlen größer als 1 maximiert Max zunächst die kleinste mit der mittleren und maximiert hernach das Resultat mit der größten der drei Zahlen, was ihn zum Resultat 2003 führt. Wie lauten die drei Ausgangszahlen von Maximum (Sind selbige eindeutig?)?

88. Im unteren Kalender von Februar 2020 (oder auch Februar 1992 bzw. Februar 2048) wurde ein (3×3)-Feld wie in der Abbildung markiert.

Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	

(a) Vergrößert man die kleinste Zahl in diesem Feld um 8 und multipliziert das Resultat mit 9, so erhält man exakt die Summe aller Zahlen aus dem Feld. Beweise, dass dies für jedes beliebige (3×3)-Feld einer Tabelle mit sieben Spalten gilt!

(b) Finde einen ähnlichen Zusammenhang für (4×4)-Felder und beweise ihn!

89. Beweise: $$\frac{2\overbrace{66\ldots\ldots\ldots\ldots66}^{2004\text{ Sechsen}}4}{4\underbrace{66\ldots\ldots\ldots\ldots66}_{2004\text{ Sechsen}}2} = \frac{2\overbrace{66\ldots\ldots\ldots\ldots66}^{2005\text{ Sechsen}}4}{4\underbrace{66\ldots\ldots\ldots\ldots66}_{2005\text{ Sechsen}}2}$$

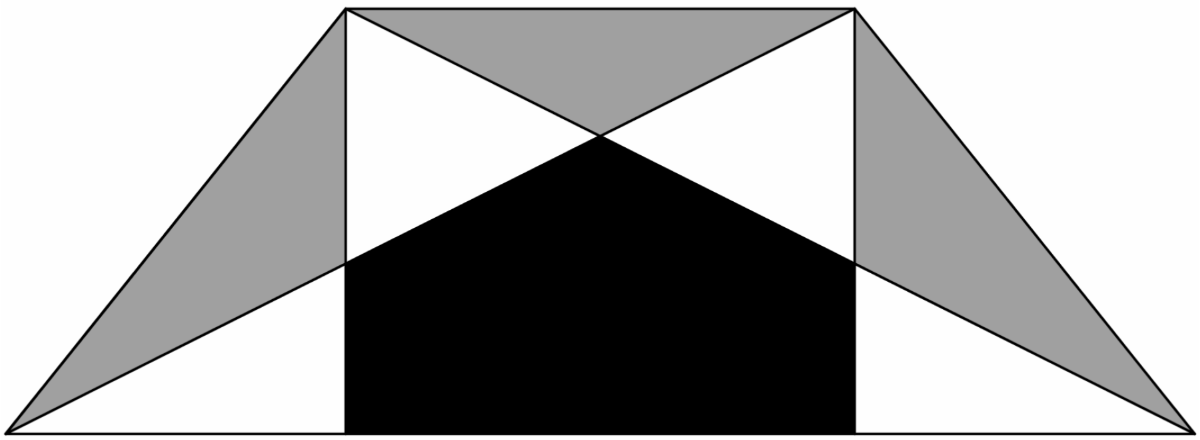
90. Ermittle alle Möglichkeiten, die Zahl 105 als Summe von mindestens zwei aufeinanderfolgenden natürlicher Zahlen darzustellen.

91. Welche möglichst nahe bei 100 000 liegende natürliche Zahl hat genau 16 Teiler und ist durch 2008 teilbar?

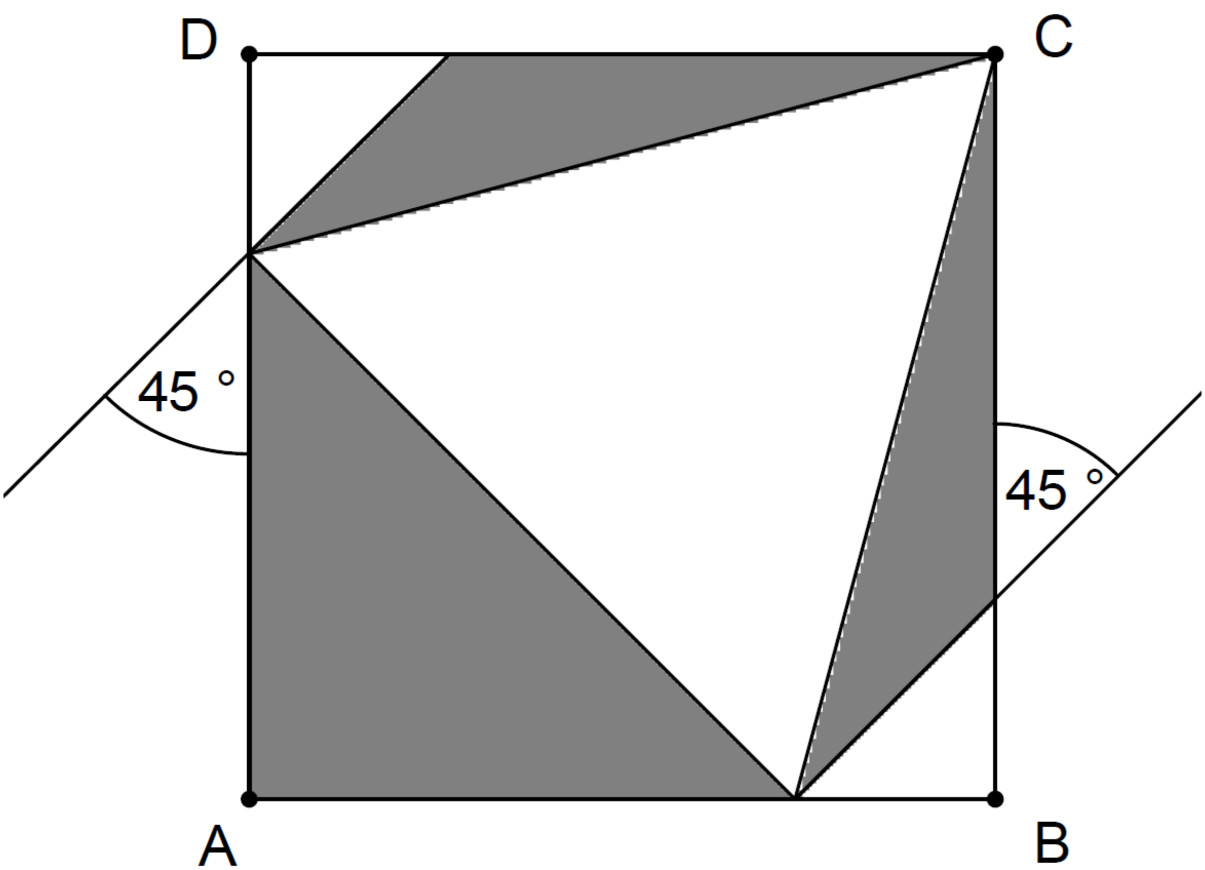
92. Die Summe von 2008 aufeinanderfolgenden positiven ganzen Zahlen ist eine Quadratzahl. Welchen kleinsten Wert kann die größte dieser 2008 Zahlen haben?

93. Ermittle die kleinste Zahl, die 18 Teiler hat.

94. Zeichnet man in einem gleichschenkligen Trapez sowohl die beiden Höhen durch die Endpunkte der kürzeren Parallelseite sowie die Diagonalen ein, so entstehen wie in der nachstehenden Abbildung illustriert sieben Dreiecke sowie ein Fünfeck.
Beweise, dass die drei gefärbten Dreiecke in Summe genau so viel Platz einnehmen als das ebenso gefärbte Fünfeck.



95. Einem Quadrat $\square ABCD$ wird ein gleichseitiges Dreieck mit einem Eckpunkt in C einbeschrieben (vgl. untere Abbildung). An den Ecken B und D werden (wie in der Abbildung illustriert) Dreiecke abgetrennt. Beweise, dass die drei gefärbten Dreiecke in Summe genau so viel Platz einnehmen als das gleichseitige Dreieck.



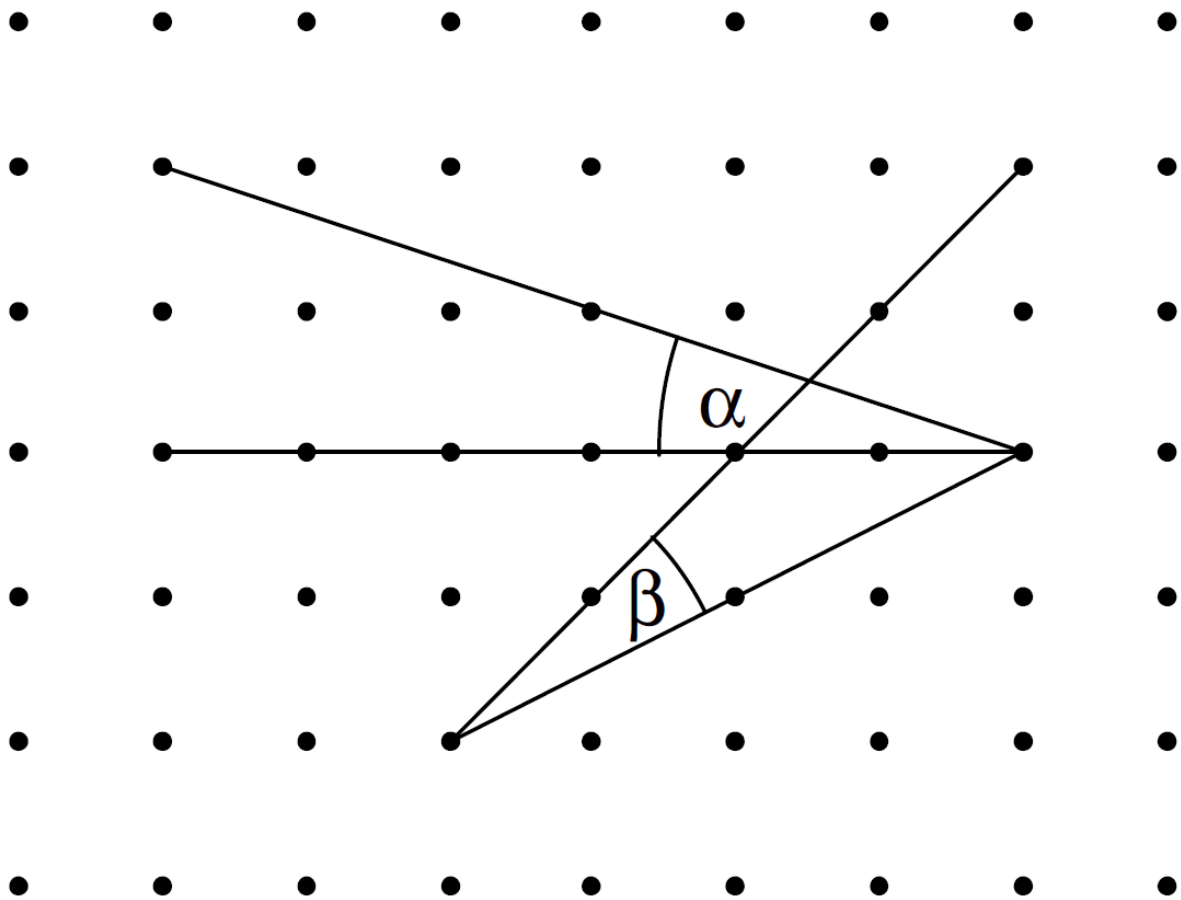
96. Ein Dreieck mit den Eckpunkten $A(0|0)$, $B(3|4)$ und $C(2|y)$ mit $y > 0$ weist einen Flächeninhalt von 5 Flächeneinheiten auf. Für welche/n Wert/e ist dies möglich?

97. Eine quadratische Platte wird vollständig in 255 Einheitsquadrate und ein größeres Quadrat zerschnitten. Welche Seitenlänge kann die Ausgangsplatte gehabt haben? Gib alle Möglichkeiten an.

98. Die Flächeninhalte zweier Quadrate, deren Seitendifferenz (in cm) ganzzahlig ist, unterscheiden sich um 400 cm^2. Welche ganzzahligen Werte (in cm) können die Quadratseiten besitzen?

99. Ausgehend von $m \in \mathbb{N}$ lasse sich $2m$ als Summe zweier Quadratzahlen darstellen. Beweise, dass dies dann auch für m selbst gilt.

100. Im unten abgebildeten quadratischen Gitternetz beweise man die Kongruenz der eingezeichneten Winkel α und β.



101. Andi, Birgit, Clemens, Daniela und Elias schreiben die Zahlen von 1 bis 10 auf zehn verschiedene Zettel und werfen diese in eine Schüssel. Jedes Kind entnimmt ihr nun blind je zwei Zettel, addiert die entsprechenden Zahlen und meldet die Summe, was in der obig angegebenen Reihenfolge (abgesehen von Elias) auf 17, 16, 11 und 7 führt.

   (a) Welche Summe erhält denn nun Elias?

   (b) Wer hat welche Zettel gezogen?

102. Alexander betrachtet die zweistellige Zahl 60 sowie die zugehörige Quadratzahl $60 \cdot 60 = 3600$. Er stellt fest, dass die Quadratzahl von 60 genau zwei Stellen mehr aufweist als die Ausgangszahl 60. Ermittle alle weiteren natürlichen Zahlen, für die das auch gilt.

103. Ermittle alle Lösungstripel des Gleichungssystems

$$\left\{ \begin{array}{c} xy + 1 = 2z \\ yz + 1 = 2x \\ xz + 1 = 2y \end{array} \right\}.$$

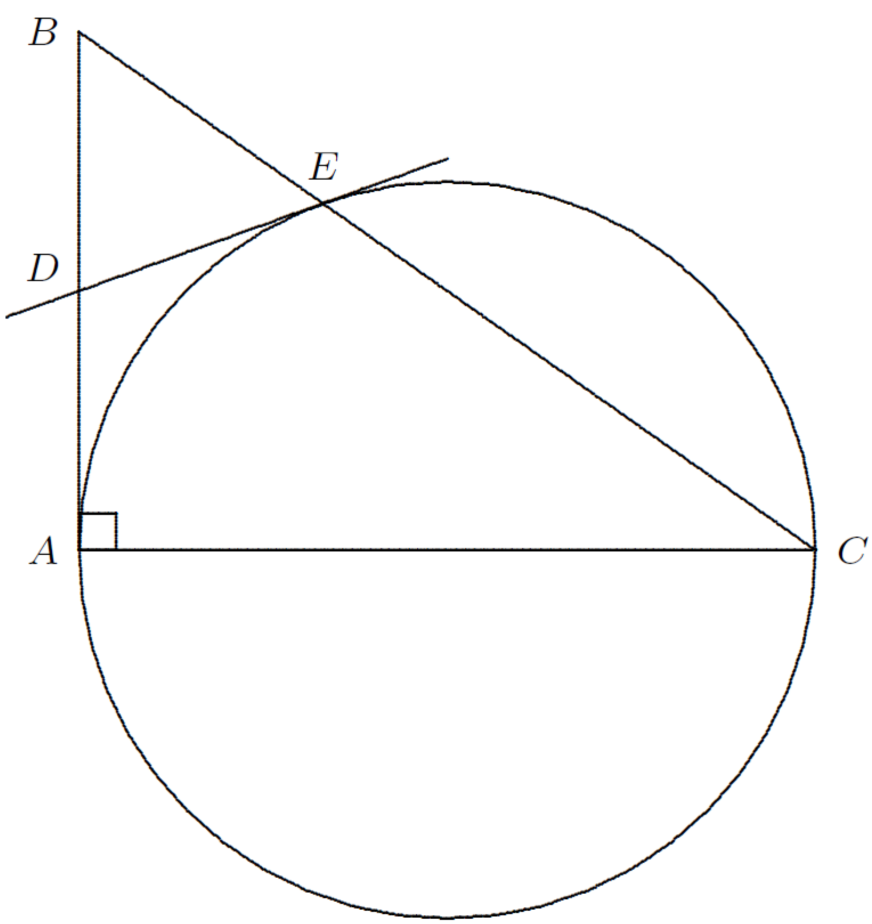
104. Der Mittelpunkt eines regelmäßigen Sechsecks wird an den Sechseckseiten gespiegelt. Die resultierenden Spiegelpunkte sind die Eckpunkte eines zweiten Sechsecks, von dem zu zeigen ist, dass es den dreifachen Flächeninhalt des Ausgangssechsecks aufweist.

105. Eine durch 6 teilbare sechsstellige Zahl $n = (abcdef)_{10}$ enthält jede der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 und 6 genau einmal. Ferner weist n folgende Eigenschaften auf:

- Die Zahl $n_1 = (abcde)_{10}$ ist durch 5 teilbar.
- Die Zahl $n_2 = (abcd)_{10}$ ist ein Vielfaches 4.
- Die Zahl $n_3 = (abc)_{10}$ ist durch 3 teilbar.
- Die Zahl $n_4 = (ab)_{10}$ ist gerade.

Ermittle alle Zahlen, die für n in Frage kommen.

106. Ausgehend vom unten abgebildeten rechtwinkligen Dreieck ΔABC wird an die Kreislinie mit dem Durchmesser AC im (nebst C) zweiten Schnittpunkt mit der Hypotenuse die Tangente gelegt und mit der Kathete AB geschnitten, was wie in der Abbildung illustriert auf das Dreieck ΔBDE führt. Beweise, dass dieses Dreieck gleichschenklig ist und ferner, dass D die Kathete AB halbiert.

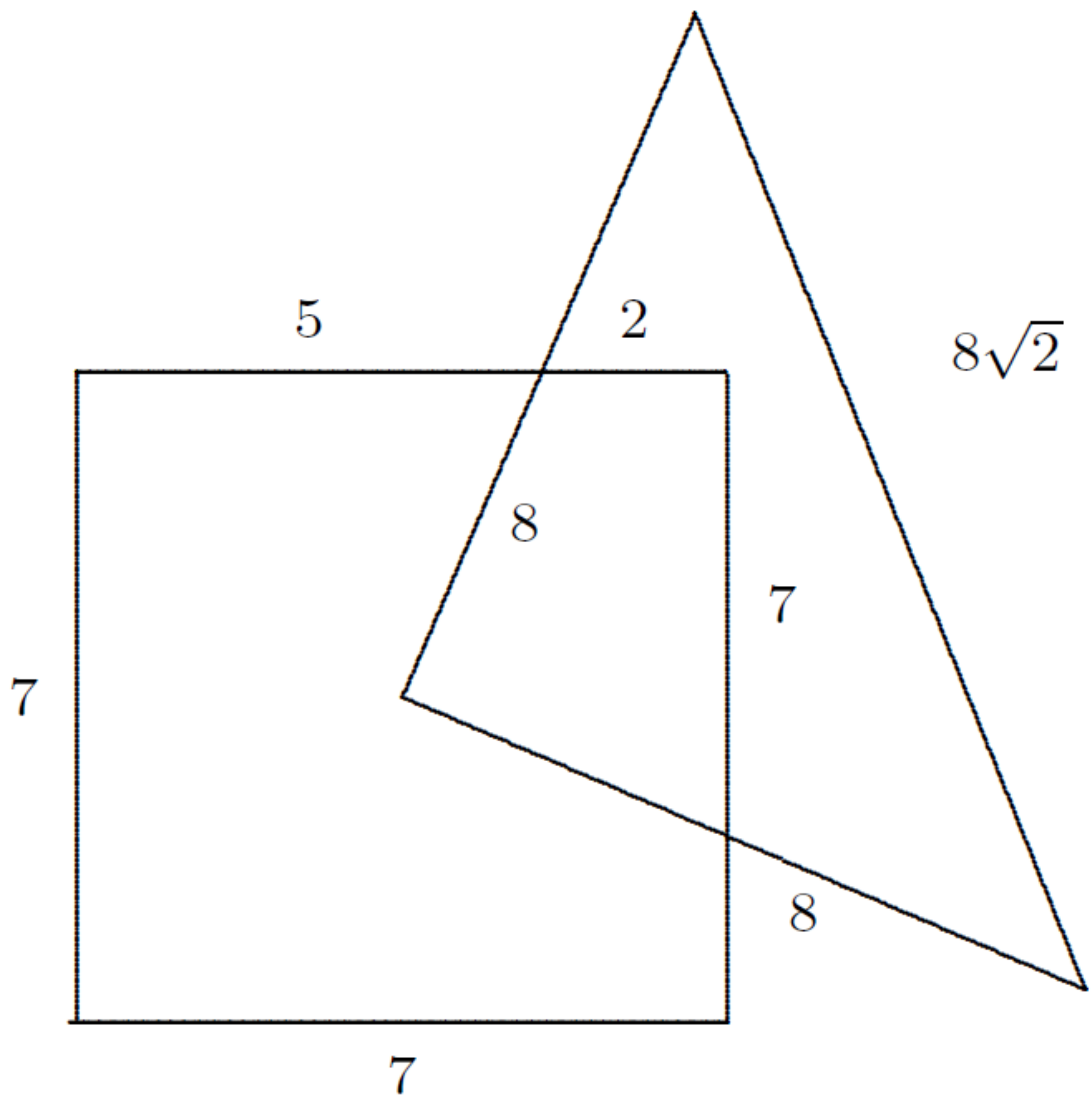


107. Mathemanfred vereinfacht den Bruch $\dfrac{37^3 + 13^3}{37^3 + 24^3}$ wie folgt:

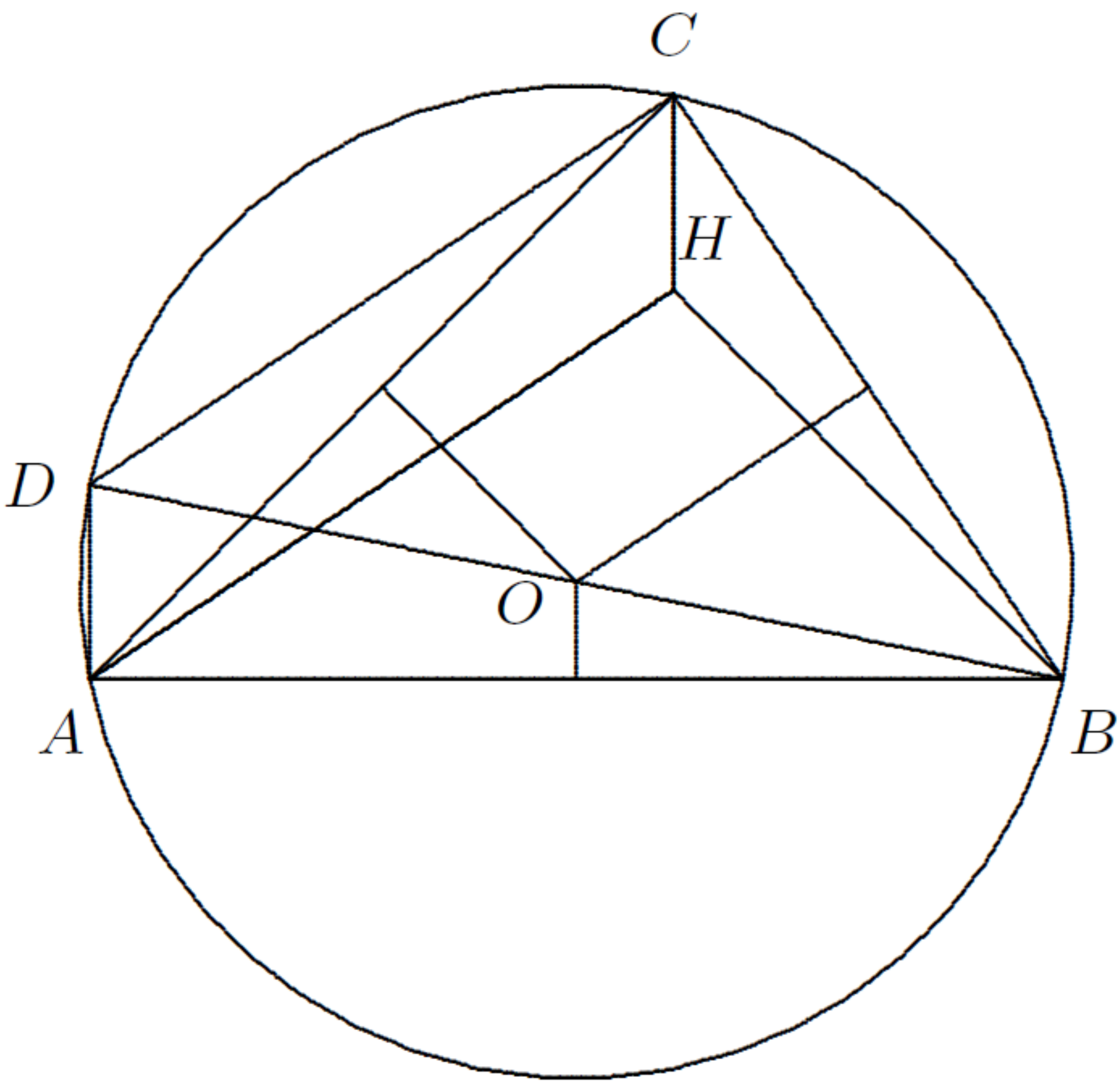
$$\frac{37^3 + 13^3}{37^3 + 24^3} = \frac{37 + 13}{37 + 24} = \frac{50}{61}$$

Auch wenn das Kürzen der Exponenten natürlich nicht zulässig ist, stellt sich das Resultat dennoch als korrekt heraus. Woran liegt das (Beweis!)?

108. Der Scheitel des rechten Winkels des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks in der unteren Abbildung befindet sich exakt im Mittelpunkt des abgebildeten Quadrats. Wie groß ist die Überschneidungsfläche von Dreieck und Quadrat?



109. In der folgenden Abbildung bezeichnet O bzw. H den Umkreismittelpunkt bzw. Höhenschnittpunkt des spitzwinkligen Dreiecks ΔABC. Der nebst B zweite gemeinsame Punkt von g_{BO} mit der Umkreislinie des Dreiecks ΔABC sei D. Beweise, dass es sich beim Viereck $AHCD$ um ein Parallelogramm handelt.



110. Ermittle einen geschlossenen Ausdruck für

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + ... + n \cdot n!,$$

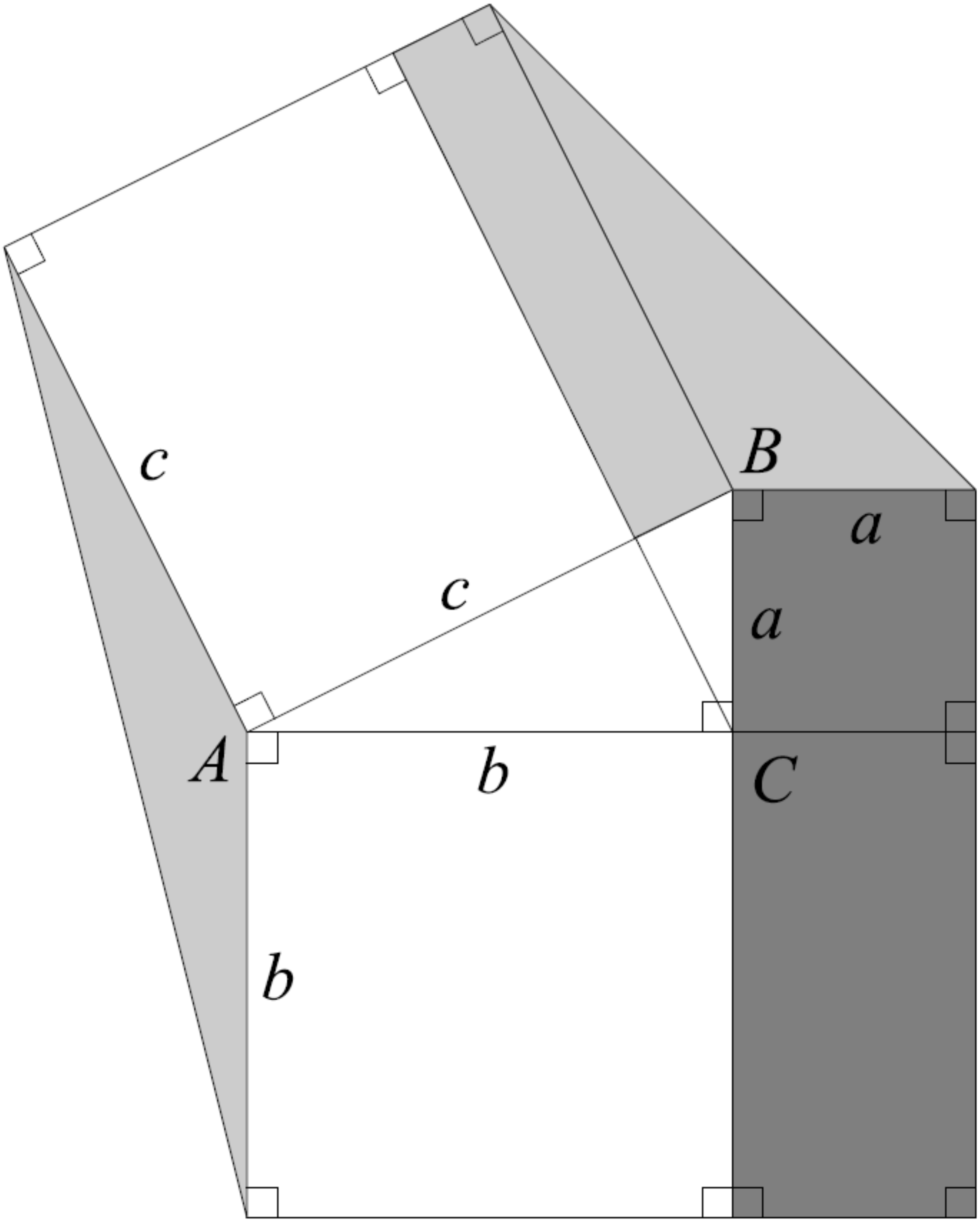
wobei

$$n! := n \cdot (n-1) \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1.$$

111. Es sei r eine rationale Näherung von $\sqrt{2}$, d.h. $\left|r - \sqrt{2}\right| = \varepsilon$ mit einer kleinen positiven reellen Zahl ε. Beweise, dass dann $\dfrac{r+2}{r+1}$ eine noch bessere Näherung ist.

112. In einem beliebigen rechtwinkligen Dreieck wird jeder Eckpunkt an der gegenüberliegenden Seite gespiegelt. Die resultierenden Spiegelpunkte sind die Eckpunkte eines zweiten im Allgemeinen nicht wieder rechtwinkligen Dreiecks, von dem zu zeigen ist, dass es den dreifachen Flächeninhalt des Ausgangsdreiecks aufweist.

113. Beweise, dass die beiden in unterschiedlichen Graustufen gefärbten Bereiche in der folgenden Abbildung den gleichen Flächeninhalt aufweisen.

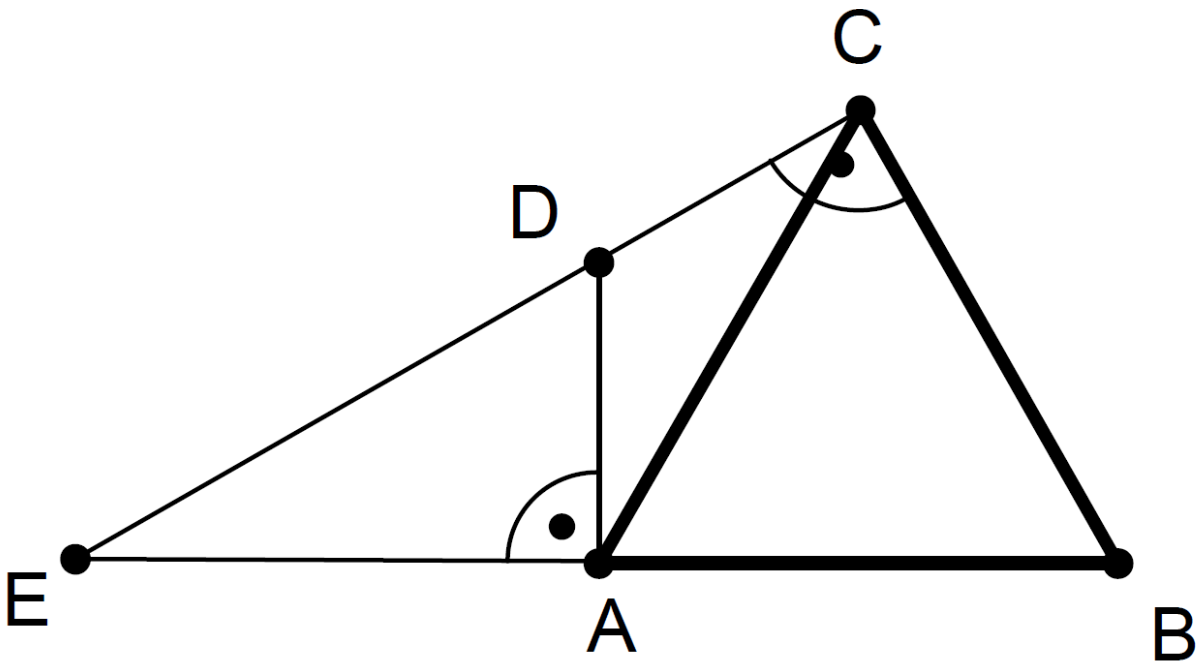


114. Ermittle alle Primzahlen p, q und r mit $q > r$, welche die Gleichung $p \cdot (q+r) = 2015$ erfüllen.

115. Ermittle alle Paare natürlicher Zahlen, welche die Gleichung $ab+2 = a^3+2b$ erfüllen.

116. H bzw. U sei der Höhenschnittpunkt bzw. der Umkreismittelpunkt eines beliebigen spitzwinkligen Dreiecks ΔABC. Die Gerade g_{AU} schneide die Höhe h_b bzw. h_c in P bzw. Q. Beweise, dass der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ΔPQH auf der durch A verlaufenden Schwerlinie des Dreiecks ΔABC liegt.

117. In der folgenden Abbildung ist ΔABC ein gleichseitiges Dreieck. Drücke die Flächeninhalte der aus ΔABC wie in der Abbildung illustriert generierten Dreiecke ΔACD und ΔADE durch den Flächeninhalt von ΔABC aus.



118. Es sei $ABCD$ ein Trapez mit den Parallelseiten AB und CD sowie P ein Punkt auf dem Schenkel BC. Beweise, dass die Parallele zu AP durch C die Parallele zu DP durch B auf DA schneidet.

119. Die Parallelseiten eines gleichschenkligen Trapezes mit aufeinander normal stehenden Diagonalen verlaufen in einem Abstand von 7 Längeneinheiten zueinander. Ermittle den Flächeninhalt dieses Trapezes.

120. Ermittle alle ganzzahligen positiven Lösungstripel von $ab + bc + ac = 2(a + b + c)$.

121. Wie viele siebenstellige Zahlen gibt es, für die das Ziffernprodukt 45^3 beträgt?

122. H sei der Höhenschnittpunkt eines beliebigen spitzwinkligen Dreiecks ΔABC mit $\overline{AB} > \overline{AC}$, ferner sei D der Höhenfußpunkt auf g_{BC} sowie E der Spiegelpunkt von C an D. Überdies ergibt sich S als Schnittpunkt der Geraden g_{AE} und g_{BH}. Beweise, dass g_{MN} normal auf g_{DS} steht, wobei N bzw. M den Mittelpunkt der Strecke AE bzw. BH bezeichnet.

123. U sei der Umkreismittelpunkt eines beliebigen spitzwinkligen Dreiecks ΔABC, ferner D der nebst A zweite gemeinsame Punkt von h_a mit der Umkreislinie des Dreiecks ΔABC. Schließlich sei E nebst B zweite gemeinsame Punkt von g_{BU} mit der Umkreislinie des Dreiecks ΔABC. Beweise, dass das Dreieck ΔABC sowie das Viereck $\Delta BCDE$ denselben Flächeninhalt aufweisen.

124. Ermittle alle ganzzahligen nicht-negativen Lösungstripel der Gleichung

$$\frac{1}{x+2} + \frac{1}{y+2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{z+2}.$$

125. Eine Zahl besteht aus drei verschiedenen Ziffern. Die Summe der anderen fünf Zahlen, die aus denselben Ziffern gebildet werden können, beträgt 2003. Ermittle die Zahl.

126. Ermittle alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung $(m^2+n)\,(m+n^2) = (m-n)^3$, wobei sowohl $m \neq 0$ als auch $n \neq 0$ gelte.

127. Auf die Seiten BC, AC und AB eines beliebigen Dreiecks ΔABC werden nach außen gleichschenklige Dreiecke ΔCBD, ΔACE und ΔAFB aufgesetzt. Beweise, dass die Normale n_A auf g_{EF} durch A, die Normale n_B auf g_{DF} durch B sowie die Normale n_C auf g_{DE} durch C einander in einem gemeinsamen Punkt schneiden.

128. $x = (111)_b = (212)_{b-2}$. Ermittle x zur (gewöhnlichen) Basis 10!

129. (p_1, p_2) und (p_3, p_4) seien minimal benachbarte Primzahlzwillinge, wobei p_1 und p_2 die kleineren der vier Primzahlen seien. Für die via $d := p_3p_4 - p_1p_2$ definierte Differenz d beweise man:

    (a) $36 \mid d$

    (b) $d = 12 \cdot \overline{p}$, wobei $\overline{p} = \frac{1}{4} \cdot \sum\limits_{k=1}^{4} p_k$

130. (p_1, p_2) und (p_3, p_4) seien minimal benachbarte Primzahlzwillinge, wobei p_1 sowie p_2 mit $p_1 < p_2$ die kleineren und dadurch p_3 sowie p_4 mit $p_3 < p_4$ die größeren der vier Primzahlen seien. Für die via $d := p_2p_3 - p_1p_4$ definierte Differenz d beweise man $d \equiv 12$.

131. (p_1, p_2) und (p_3, p_4) seien minimal benachbarte Primzahlzwillinge, wobei p_1 sowie p_2 mit $p_1 < p_2$ die kleineren und dadurch p_3 sowie p_4 mit $p_3 < p_4$ die größeren der vier Primzahlen seien. Für die via $d := p_2p_4 - p_1p_3$ definierte Differenz d beweise man:

    (a) $12 \mid d$

    (b) $d = 4 \cdot \overline{p}$, wobei $\overline{p} = \frac{1}{4} \cdot \sum\limits_{k=1}^{4} p_k$

132. (p_1, p_2) und (p_3, p_4) seien minimal benachbarte Primzahlzwillinge, wobei p_3 und p_4 mit $p_3 < p_4$ die größeren der vier Primzahlen seien. Für die via

$$m := p_1p_2p_3 - p_4 \quad \text{und} \quad n := p_1p_2p_4 - p_3$$

definierten natürlichen Zahlen m und n beweise man:

    (a) $m < n$

    (b) $12 \mid m \quad \wedge \quad 12 \mid n$

    (c) $72 \mid d$ mit $d = n - m$

133. Für d aus der vorherigen Aufgabe beweise man:

d hat mindestens 36 Teiler (1 und d mitgezählt!).

134. (p_1, p_2) und (p_3, p_4) seien minimal benachbarte Primzahlzwillinge, wobei p_3 und p_4 mit $p_3 < p_4$ die größeren der vier Primzahlen seien. Für die via

$$k := p_2 p_3 p_4 - p_1 \quad \text{und} \quad \ell := p_1 p_3 p_4 - p_2$$

definierten natürlichen Zahlen k und ℓ beweise man:

(a) $k > \ell$

(b) $12 \mid k \quad \wedge \quad 12 \mid \ell$

(c) $72 \mid d'$ mit $d' = k - \ell$

135. Für d' aus der vorherigen Aufgabe beweise man:

$$d' \text{ hat mindestens 36 Teiler (1 und } d \text{ mitgezählt!).}$$

136. Für die Differenzen d und d' aus den **letzten vier Aufgaben** beweise man:

(a) $d' > d$

(b) $d' - d = 24 \cdot \overline{p}$ mit $\overline{p} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{k=1}^{4} p_k$

(c) Eine der beiden Differenzen hat sogar mindestens 54 Teiler.

137. Für die in den Aufgaben 132 und 134 definierten natürlichen Zahlen k und m beweise man:

(a) $k > m$

(b) $48 \mid k - m$

138. Wir betrachten ein gleichschenkliges Dreieck ΔABC mit der Basislänge $\overline{AB} = 2b$ und der Höhe h auf die Basis, wobei $h > b$ gelte. Die Streckensymmetrale m_{AC} schneide BC in P. Beweise:

(a) Bezeichnet m_h bzw. m_q (wie üblich) das harmonische bzw. quadratische Mittel, dann gilt

$$\overline{M_{AC}P} = m_h(b, h) \cdot m_q(b, h) \cdot \frac{\sqrt{2}}{h - b}.$$

(b) Schneidet die Normale n auf m_{AC} durch P die Gerade $g_{M_{AB}C}$ in Q, dann gilt

$$\overline{M_{AB}Q} = \frac{m_h(b, h)}{k - 1},$$

wobei k die Steigung von g_{AC} gegenüber g_{AB} bezeichnet.

(c) $\overline{M_{AB}Q} < \overline{M_{AC}P}$

Gutes Gelingen!

Wien, im Juli 2019. Dr. Robert Resel, eh.